

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე
ია მეზონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

მასწავლებლის წიგნი

X კლასი

II სემესტრი

გრიფინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების
სამინისტროს მიერ 2022 წელს



გამომცემლობა **ინტელექტი**
თბილისი 2022

გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე,
ია მეზონია, ლამარა ქურჩიშვილი

მათემატიკა

X კლასი

II სემესტრი

მასწავლებლის წიგნი

გამომცემლობა **ინტელექტი**

თბილისი 2022

I გამოცემა

რედაქტორი თეიმურაზ ვეფხვაძე

დამკაბადონებელი ვიოლა ტულუში

ტექსტის ამკრეფი მართა ნიკლაური

ISBN 978-9941-31-510-7

© გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მეზონია, ლამარა ქურჩიშვილი, 2022.

© გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2022.

გამომცემლობა **ინტელექტი**

თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზ. 5. ტელ.: 2-25 05 22

www.intelekti.ge info@intelekti.ge

INTELEKTI PUBLISHING

5 Ilia Chavchavadze Ave., Tbilisi, Georgia. Tel.: (995 32) 2-25 05 22

სარჩევი

მე-10 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს (II ნაწილი) კონცეფცია	5
მასწავლებლის წიგნის მოკლე მიმოხილვა	7
სტანდარტის შედეგების მიღწევისა და შინაარსის ურთიერთკავშირის მატრიცა	9

V თავი. ალგებრული გამოსახულება

5.1. ცვლადი, ცვლადების გამოყენების მაგალითები; ფორმულა	13
5.2. ალგებრული გამოსახულება. ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა	16
5.3. ერთწევრი და მრავალწევრი. მოქმედებები ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები	18
5.4. კვადრატული სამწევრი. კვადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად	20
5.5. ალგებრული წილადები. მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე	23
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	27
V თავის დამატებითი ამოცანები	28
შემაჯამებელი წერა	30

VI თავი. განტოლება. უტოლობა

6.1. ტოლობა, განტოლება. წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება	37
6.2. კვადრატული განტოლება. რაციონალური განტოლება	41
6.3. ირაციონალური განტოლება. მოდულის შემცველი განტოლება	44
6.4. წრფივი უტოლობა. წრფივ უტოლობათა სისტემა	47
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	51
VI თავის დამატებითი ამოცანები	52
შემაჯამებელი წერა	54

VII თავი. ორუცნობიანი განტოლებები, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები

7.1. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება	61
7.2. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა	63
7.3. წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა	65
7.4. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის მაგალითები	68
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	72
VII თავის დამატებითი ამოცანები	74
შემაჯამებელი წერა	75

VIII თავი. გეომეტრიული ფიგურები

8.1. გეომეტრიული ფიგურები და მათთან დაკავშირებული სიდიდეების გაზომვის მაგალითები	81
8.2. გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე. ცენტრული და ღერძული სიმეტრიები	85
8.3. მობრუნება. მობრუნებათა კომპოზიცია.....	89
8.4. რადიანული ზომა	91
8.5. მსგავსი ფიგურები	92
8.6. ჰომოთეტია	94
8.7. მსგავსების ასახვა. სამკუთხედის მსგავსების ნიშნები	97
8.8. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში.....	99
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	103
VIII თავის დამატებითი ამოცანები	105
შემაჯამებელი წერა	106

IX თავი. დამოკიდებულებები სიმრავლეებს შორის. ფუნქცია

9.1. სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების მაგალითები. ფუნქცია	111
9.2. ფუნქციის გრაფიკი	115
9.3. სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებებისა და ფუნქციის მოცემის ხერხები....	117
9.4. ფუნქციის თვისებები.....	119
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	122
IX თავის დამატებითი ამოცანები	124
შემაჯამებელი წერა	125

X თავი. გავიღრმავოთ ცოდნა წრფივი და კვადრატული ფუნქციების შესახებ

10.1. წრფივი ფუნქცია. თვისებები. გრაფიკი	130
10.2. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი გრაფიკი. წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის პირობები	133
10.3. წრფივი ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე.....	136
10.4. ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნის მაგალითები.....	138
10.5. კვადრატული ფუნქცია. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი.....	139
ამოცანები თვითშემოწმებისთვის	144
X თავის დამატებითი ამოცანები	144
შემაჯამებელი წერა	146
ლიტერატურა.....	151
დამატებითი ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები.....	153

მე-10 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს (II ნაწილი) კონცეფცია

მე-10 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს II ნაწილი იმავე პრინციპებითაა შედგენილი, რომლებითაც — პირველი ნაწილი. გათვალისწინებულია საშუალო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების მიზნები: დაეხმაროს მოსწავლეს გააკეთოს ინფორმირებული და გააზრებული არჩევანი; მოემზადოს უმაღლესი განათლების მისაღებად, ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად, განივითაროს XXI საუკუნისთვის საჭირო კომპეტენციები.

II ნაწილი საშუალო საფეხურის ახალი სტანდარტის მოთხოვნათა სრული შესაბამისობითაა აგებული; ამ საფეხურის საწყის ეტაპზე ძირითადი ყურადღება კვლავ გავლილი მასალის გამეორებას ეთმობა; შესწავლილი საკითხების გამეორება ცოდნის გაღრმავების გათვალისწინებით მიმდინარეობს. მაგალითად, მე-5 თავის ძირითადი ნაწილი ცვლადის შემცველი გამოსახულებების გამარტივებების ხერხების გამეორებაა, თუმცა, მოსწავლე პოულობს პასუხებს კითხვებზე: რა არის ცვლადი, რა არის ფორმულა? რა არის მთელი გამოსახულება? რა არის წილადური გამოსახულება? რა არის რაციონალური გამოსახულება?

ჩვენი შემოქმედებითი თავისუფლება მორგებულია სტანდარტის მოთხოვნებზე, რომლებიც მათემატიკის სწავლა-სწავლების მიზნებთან, მეთოდოლოგიურ ორიენტირებთან და შეფასებასთან არის დაკავშირებული.

სახელმძღვანელოს შინაარსი მეათე კლასის მეორე ნაწილის სტანდარტით დადგენილი სამიზნე ცნებების შესაბამისადაა შერჩეული და ხელს უწყობს საშუალო საფეხურის ძირითადი მიზნების მიღწევას. დავალებები ისეა შერჩეული, რომ მასწავლებელმა მოსწავლეთა მიღწევების დონის განსაზღვრისას თანამედროვე თეორიები გამოიყენოს (მაგალითად, განმავითარებელი შეფასებისას მოსწავლეთა მიღწევების დონეების სოლო ტაქსონომიის გამოყენებით განსაზღვრა).

დიფერენცირებული სწავლების ხელშეწყობა ჩვენი სახელმძღვანელოს შინაარსის განმსაზღვრელი მთავარი ელემენტია. წარმოდგენილია სავარჯიშოთა მრავალფეროვანი სისტემა, რომელიც მოსწავლეს საკუთარი შესაძლებლობების სრული გამოვლენის საშუალებას აძლევს. სახელმძღვანელო განკუთვნილია მოსწავლეთა აკადემიური მზაობის ყველა დონისთვის. ბევრია მარტივი მაგალითები, ძირითადად, გავლილი მასალიდან: ალგებრული გამოსახულებების გამარტივება, განტოლებების, უტოლობების და სისტემების ამოხსნა. ახლის შემოტანის პროცესი შესწავლილი მასალის ხანგრძლივ გამეორებას ეყრდნობა; მაგალითად, უტოლობათა სისტემების ამოხსნების, ამ ამოხსნების გრაფიკული ხერხების შესახებ მოცემული მასალა ეხმარება მოსწავლეს გაიღრმავოს ანალიზური გეომეტრიის საწყისების ცოდნა, გაეცნოს და აითვისოს მათემატიკის გამოყენების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა — წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის გეომეტრიული მეთოდი (ორი ცვლადის შემთხვევაში); გეომეტრიული ფიგურების, მათი ზომების შესახებ მასალის გამეორება ხელს უწყობს ამ მასალის კარგად ათვისებას და ახალ საკითხებზე შეუფერხებლად გადასვლას, ფიგურათა ტოლობისა და მსგავსების შესახებ თანამედროვე წარმოდგენების ათვისებას. მნიშვნელოვანია, რომ აღვადგინეთ რუბრიკა — „მოისაზრე“, რომელიც მაღალი მზაობის მოსწავლეებისთვის არის განკუთვნილი და შედარებით რთუ-

ლი ამოცანების ამოხსნას გულისხმობს. აქვეა ამოცანები თვითშეფასებისთვის და დამატებითი ამოცანები.

მე-10 კლასის სახელმძღვანელოს II ნაწილი შედგება 6 თავისგან. ყოველი თავი, როგორც წესი, ერთ სასწავლო თემას ეხება და იწყება კომპლექსური დავალებით, რომელიც ამ თემასთან დაკავშირებული სამიზნე ცნებისა და მასთან დაკავშირებული საკითხების ათვისებასა და პრაქტიკული გამოყენებების გააზრებას ემსახურება. მოსწავლე, თემის შესწავლის პროცესში, რომელიც შესაბამის თავში წარმოდგენილი თეორიული მასალისა და სავარჯიშოების გამოყენებით მიმდინარეობს, ყურადღებას აქცევს კომპლექსური დავალებით წარმოდგენილ კითხვებს; მოიძიებს შესაბამის მასალას და ამზადებს მას პრეზენტაციისთვის. ყურადღება ექცევა შესაბამისი მათემატიკური სიმბოლიკის შემოღების ისტორიის შესწავლასაც და, რაც არსებითია, სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხების გამოყენებებს სხვა მეცნიერებებში, ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

მეორე ნაწილის შინაარსიც მათემატიკის ერთიანობის სულისკვეთებითა და პრაქტიკული გამოყენებების წამოწევით ხასიათდება. გეომეტრიული მასალის განხილვისას, ვიხსენებთ დებულების პირობითი წინადადების სახით ჩანერისა და შებრუნებული წინადადების შედგენის წესების გამოყენებებს; სიახლეა აუცილებელი და საკმარისი პირობების არსის გაცნობა-გააზრება; პირდაპირი და მისი შებრუნებული წინადადების ერთ წინადადებად ჩამოყალიბების წესების გამოყენება. ამასთანავე, გეომეტრიული გარდაქმნების ახსნისას, გამოიყენება თეორიულ-სიმრავლური მეთოდი, ფუნქციურ დამოკიდებულებებზე დაყრდნობა. განვიხილავთ ორი ტიპის გეომეტრიულ გარდაქმნებს — როცა არ იცვლება ორ წერტილს შორის მანძილი, ან ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება (მსგავსების ასახვა, ჰომოთეტია). ასახვების ენისა და კოორდინატთა მეთოდის გამოყენება კიდევ ერთხელ მიაწვდის გეომეტრიისა და ალგებრის ერთიან საფუძველზე სწავლების უპირატესობაზე.

ზოგიერთი ცნება ფორმალური განსაზღვრებების გარეშე, აღწერით შემოგვაქვს; ცნებათა ათვისების პროცესს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნით წარვმართავთ. მე-10 კლასის სახელმძღვანელოს დანიშნულების შესაბამისად, ვიმეორებთ და ვიღრმავებთ ცოდნას ცვლადის შემცველი გამოსახულებების გარდაქმნების, განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნების შესახებ. თუმცა, ამ შემთხვევაშიც, შევეცადეთ, რომ დავეხმაროთ მოსწავლეებს და შესწავლილ საკითხებზე მოკლე ინფორმაცია წიგნის ბოლოს შესაბამის რუბრიკაში წარმოვადგინეთ.

სახელმძღვანელოს ტექსტი საშუალებას აძლევს მასწავლებელს სწავლა კონსტრუქტივისტული მეთოდით წარმართოს; კომუნიკაცია მოსწავლესთან ინტერაქტიული ფორმით აწარმოოს; წინარე ცოდნის გახსენებითა და გამეორებით, მასზე დაყრდნობით, მასწავლებელს შეეძლება სწავლების პროცესის აგება. სახელმძღვანელო დაეხმარება მოსწავლეებს, რომ ცოდნის კონსტრუირება, ძირითადად, სახელმძღვანელოს მასალაზე, საკუთარ გამოცდილებაზე და მიგნებებზე დაყრდნობით მოახდინონ. სახელმძღვანელო საშუალებას იძლევა დიფერენცირებული სწავლება განვახორციელოთ — სხვადასხვა სირთულის ამოცანები, მათ შორის, შედარებით მარტივი და სწრაფად შესასრულებელი დავალებები, ე. წ. „ტესტური“ (დახურულბოლოიანი ამოცანები) საშუალებას გვაძლევს მოსწავლეებზე ორიენტირებული სწავლების ხელშემწყობი გარემო შევქმნათ. აღნიშნული ტიპის ამოცანებზე პასუხების შერჩევაც შეიძლება მსჯელობის საგნად ვაქციოთ; საჭირო მომენტში დასმული კითხვა — რატომ? მოსწავლეს ჩააფიქრებს და აიძულებს დაასაბუთოს პასუხი. აქვე უნდა აღინიშნოს სახელმძღვანელოში საკლასო და საშინაო დავალებების განცალკევება, საშინაო დავალებებში კლასში განხილულის ანალოგიური ამოცანების განხილვა;

თუმცა, კარგად გვესმის, რომ შემოქმედებითი უნარების განვითარება მხოლოდ ანალოგიებით მუშაობით არ ხდება; ამიტომ მოსწავლეებს ვთავაზობთ განსხვავებულ ამოცანებსაც, ზოგჯერ შედარებით რთულ ამოცანებსაც („მოისაზრე“).

აქვე აღვნიშნავთ, რომ ვცდილობთ ტექსტის მეცნიერულ სანდოობასთან ერთად დავიცვათ მასალის გადაცემის „სიმკაცრის“ ზომიერი დონე, მისაწვდომობა, ენის სიზუსტე და სიმარტივე. სიზუსტის ის დონე, რომლითაც გამოირჩევა ჩვენი სახელმძღვანელო, საშუალებას აძლევს უმაღლესი სკოლის პედაგოგებს, ააგონ კალკულუსის, პრეკალკულუსისა და სხვა კურსები.

მასწავლებლის წიგნის მოკლე მიმოხილვა

მასწავლებლის წიგნის დანიშნულებაა, მათემატიკის სტანდარტის შესაბამისად, მე-10 კლასის II სემესტრში რეკომენდებული სამიზნე ცნებების (ალგებრული გამოსახულება, განტოლება, უტოლობა, სისტემა, შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია, დამოკიდებულება, გეომეტრიული ობიექტები, სიდიდეები, ზომები, გეომეტრიული გარდაქმნები, გეომეტრიული ფიგურები) შესაბამისი მასალის სწავლებისთვის საჭირო მეთოდიკური რეკომენდაციები მიაწოდოს მასწავლებელს. წიგნი ეხმარება მასწავლებელს სასწავლო პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში. მიწოდებულია დამატებითი მასალა შემაჯამებელი წერების ჩასატარებლად და მათ შესაფასებლად.

ყოველი თემის მიხედვით განსაზღვრულია მკვიდრი წარმოდგენები, რომლებიც თემის შესწავლისას უნდა ჩამოყალიბდეს მოსწავლის ხანგრძლივ მეხსიერებაში.

მითითებულია შესაბამისი საკვანძო შეკითხვები, რომლებშიც, შეიძლება ითქვას, გაკვეთილის მიზანი იკვეთება.

მასწავლებლის წიგნი ეხმარება მასწავლებელს შეფასების ინდიკატორების განსაზღვრაში; განმავითარებელი შეფასების განხორციელებაში. მნიშვნელოვანი აქცენტი კომპლექსურ დავალებებზე კეთდება. კომპლექსური დავალებების შესრულების ხარისხი აისახება განმავითარებელ და, შესაძლებელია, განმსაზღვრელ შეფასებებზეც. მასწავლებელმა შეფასებისთვის შეიძლება გამოიყენოს მასალის ათვისების დონეების თანამედროვე კლასიფიკაციის ნიმუშები. მაგალითად, სოლო (SOLO) ტაქსონომიის პრინციპი, როცა იზომება მოსწავლეთა მიღწევები 5 დონის მიხედვით:

1) პრესტრუქტურული დონე — მოსწავლე ვერ იაზრებს საკითხს, იყენებს შეუსაბამო ინფორმაციას.

2) უნისტრუქტურული დონე — მოსწავლეს შეუძლია მხოლოდ ერთი ასპექტის განხილვა და მარტივი, აშკარა/ცხადი კავშირების დამყარება. მოსწავლეს შეუძლია ტერმინოლოგიის გამოყენება, ზეპირად გადმოცემა (გახსენება), მარტივი ინსტრუქციების/ალგორითმების შესრულება; პარაფრაზირება, ამოცნობა, დასახელება ან დათვლა.

3) მულტისტრუქტურული დონე — მოსწავლეს შეუძლია რამდენიმე ასპექტის განხილვა განცალკევებულად, ერთმანეთთან კავშირის გარეშე, მას შეუძლია ჩამოთვლა, აღწერა, კლასიფიცირება, კომბინირება, მეთოდების, სტრუქტურის გამოყენება, პროცედურის შესრულება და სხვა.

4) მიმართებითი დონე — მოსწავლეს შეუძლია გაიაზროს კავშირი რამდენიმე ასპექტს შორის, აგრეთვე ისიც, თუ როგორ ერგება/შეეხამება ეს ასპექტები ერთმანეთს და ქმნის

მთელს; ნააზრევი დასტრუქტურებულია და, ამგვარად, მოსწავლეს აქვს იმის უნარი, რომ შეადაროს, დააკავშიროს, გააანალიზოს, გამოიყენოს თეორია, ახსნას კავშირი მიზეზებისა და შედეგების კუთხით.

5) გაფართოებული აბსტრაქტული დონე — მოსწავლეს შეუძლია სტრუქტურის განზოგადება მოცემულის (შეთავაზებულის) მიღმა, სტრუქტურის აღქმა მრავალი სხვადასხვა კუთხიდან/თვალთახედვიდან და იდეების გადატანა ახალ სფეროში. მას შეუძლია, განზოგადება, ჰიპოთეზის წამოყენება, კრიტიკა ან თეორიის ჩამოყალიბება.

ამ დონეების შესაბამისად ჩამოვყალიბებთ კრიტერიუმებს ყოველი სამიზნე ცნების გააზრების შესამოწმებლად; შესაბამისად ჩამოვყალიბდება განმავითარებელი შეფასების კომენტარი.

ამასთანავე, სოლო ტაქსონომიის დონეები მხოლოდ და მხოლოდ მასწავლებლის ინსტრუქციას, ისინი ეხმარება მასწავლებელს მიღებული შედეგების გაანალიზებაში. გაკეთებული ანალიზის გამოყენებით, მასწავლებელი აწვდის კომენტარს მოსწავლეს იმასთან დაკავშირებით, თუ რაში აქვს წინსვლა, რა აქვს გასაუმჯობესებელი და როგორ უნდა გააუმჯობესოს.

მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს შეფასების ინსტრუმენტები, რომლებიც ითვალისწინებს საერთაშორისო შემფასებლების სტრატეგიებს (*TIMSS*, *PISA* და სხვა). მოსწავლეთა მიღწევების საერთაშორისო კვლევების ამსახველ დოკუმენტებში მითითებულია შეფასების ექვსი დონე, რომელთა მიხედვითაც ხდება მოსწავლეთა მიღწევების წარმოდგენა სხვადასხვა საგნის მიხედვით. მათემატიკური განსწავლულობა, ამ კვლევის მიხედვით, მოვლენის მათემატიკურ ენაზე ფორმულირების, გამოყენებისა და ინტერპრეტაციის უნარის გამოვლენით ფასდება. იგი მოიცავს მათემატიკური მსჯელობის ჩატარების, მათემატიკური ცნებების, პროცედურების, ფაქტებისა და ინსტრუმენტების გამოყენების უნარებს; იმ უნარებს, რომლებიც გვეხმარება, რომ მათემატიკურად აღწეროს და აიხსნას რეალური მოვლენა.

ამასთანავე, მასწავლებლებს შევასხენებთ, რომ განმავითარებელი შეფასება უწყვეტად უნდა მიმდინარეობდეს, ის უნდა იწყებოდეს საშინაო დავალების განხილვისას, რაც, ფაქტობრივად ყოველი გაკვეთილის დაწყებისას ტარდება.

ამ პროცესის განხორციელებაში პედაგოგს მასწავლებლის წიგნი ეხმარება, მასში წარმოდგენილია საშინაო დავალების შესრულების ხერხები. განმავითარებელი შეფასება ახალ მასალაზე გადასვლისა და მისი განხილვის პროცესშიც მიმდინარეობს. მასწავლებლის წიგნში წარმოდგენილია ამ პროცესის დაწვრილებით აღწერაც. აქვეა შემაჯამებელი წერების სარეკომენდაციო ნიმუშებიც, რომლებიც არსებით დახმარებას გაგინევთ ამ წერისთვის მზადებასა და შედეგების განხილვაში.

სტანდარტის შედეგების მიღწევისა და შინაარსის ურთიერთკავშირის მატრიცა

თემების ჩამონათვალი	სტანდარტის შედეგები მოსწავლემ უნდა შეძლოს:	სამიზნე ცნებები	კომპლექსური დავალება
ალგებრული გამოსახულება (ცვლადი, ერთწევრი, მრავალწევრი, კვადრატული სამწევრი, ალგებრული წილადები)	უცნობი სიდიდეების ცვლადის საშუალებით წარმოდგენა; რიცხვებზე ოპერაციების თვისებების განზოგადება და ამ თვისებების ცვლადების გამოყენებით წარმოდგენა. სიდიდეებისა და მათ შორის კავშირების ცვლადების გამოყენებით წარმოდგენა (მათ. საშ. 2).	ალგებრული გამოსახულება	ასოითი გამოსახულებები და ფორმულები
განტოლება; უტოლობა. (წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება, კვადრატული განტოლება; რაციონალური და ირაციონალური განტოლება; მოდულის შემცველი განტოლება; წრფივი უტოლობა, უტოლობათა სისტემა)	მათემატიკური მოდელირება წრფივი განტოლების, კვადრატული განტოლების, რაციონალური და ირაციონალური განტოლების, მოდულის შემცველი განტოლების საშუალებით; წრფივი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის საშუალებით. წრფივი, კვადრატული განტოლების ამოხსნათა გამოკვლევა; წრფივი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამოხსნისას თეორიულ-სიმრავლური კონცეფციის გამოყენება (მათ. საშ. 2).	განტოლება, უტოლობა, სისტემა	განტოლებისა და უტოლობის გამოყენება
ორუცნობიანი განტოლებები; ორუცნობიან განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები	მათემატიკური მოდელირება წრფივი ორუცნობიანი განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის, წრფივი ორუცნობიანი უტოლობათა სისტემის გამოყენებით. წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნის გეომეტრიული ხერხის გამოყენებით წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა (მათ. საშ. 2).	ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა	უტოლობათა სისტემის გამოყენება

დამოკიდებულებები სიმრავლეებს შორის. ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები; ფუნქციის გრაფიკი	შესასწავლი მოვლენიდან გამომდინარე, ცვლად სიდიდეთა შორის შესაბამისობის, ფუნქციური კავშირის დამყარება და წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით (წყვილებით, გრაფიკით, ცხრილით) ფუნქციის გამოყენება სხვადასხვა ვითარების გასაანალიზებლად. წრფივი ფუნქციის, მახასიათებელი თვისების გააზრება და გამოყენება, ფუნქციითა გრაფიკების გარდაქმნის ხერხების გამოყენება კვადრატული ფუნქციის მაგალითზე. (მათ. საშ. 3).	შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია, დამოკიდებულება სიდიდეებს შორის	ელექტრონერგის მოხმარების გადასახადის გადახდის წესი
წრფივი და კვადრატული ფუნქციები	წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისების აღწერა და გამოყენება; წრფივი ფუნქციით მოდელირების მაგალითების განხილვა; მისადაგების წრფის განტოლების აღწერა, განტოლების შედგენა. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგება ფუნქციითა გრაფიკების გარდაქმნის წესების გამოყენებით. (მათ. საშ. 3).	შესაბამისობა, ფუნქცია, გრაფიკი	წრფივი და კვადრატული ფუნქციების ზოგიერთი გამოყენება
გეომეტრიული ობიექტები, ზომები.	გეომეტრიული ფორმების ამოცნობა, აღწერა, კლასიფიკაცია; გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებათა სწორად ჩამოყალიბება; გეომეტრიული ობიექტების ზომის (სიგრძე, ფართობი, მოცულობა) გამოთვლა (მათ. საშ. 4).	გეომეტრიული ობიექტები და ზომები.	გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენებები
გეომეტრიული გარდაქმნები, კოორდინატებით წარმოდგენა	გეომეტრიული გარდაქმნების წარმოდგენა კოორდინატებით; სიბრტყის თავის თავზე ასახვათა ტიპები — გადაადგილებები, მსგავსების ასახვები (ჰომოთეტია, მსგავსება). ფიგურათა ტოლობა და ფიგურათა მსგავსება. (მათ. საშ. 5).	გეომეტრიული გარდაქმნები.	

ალგებრული გამოსახულება

თემა: ალგებრული გამოსახულება საათების სავარაუდო რაოდენობა: 16 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ცვლადი, ფორმულა, ერთწევრი, მრავალწევრი, რაციონალური გამოსახულება, კვადრატული სამწევრი			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
ალგებრული გამოსახულება, ცვლადი. ალგებრული გამოსახულება არის გამოსახულება, რომელიც შედგენილია რიცხვებისგან, ცვლადებისგან, შეკრების, გამოკლების, რაციონალურ ხარისხში ახარისხების, ამოფესვის, მოქმედებათა ნიშნებისა და ფრჩხილებისგან. ალგებრული გამოსახულება შეიძლება იყოს მთელი, წილადური, ირაციონალური. წილადური და ირაციონალური გამოსახულებისთვის გამოიყოფა ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები. ცვლადების საშუალებით შეიძლება ჩავენეროთ რიცხვებისა და მოქმედებების თვისებები. კვადრატული სამწევრი მამრავლებად შეიძლება სხვადასხვა ხერხით დავშალოთ	ცვლადი, ფორმულა, ალგებრული გამოსახულება, რაციონალური და ირაციონალური გამოსახულებები; ერთწევრი, მრავალწევრი, კვადრატული სამწევრი, ალგებრული წილადი, მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე	რა სახის ჩანაწერებს ეწოდება ფორმულა? რას ეწოდება იგივეობა? რას ეწოდება ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისთვის? რას ეწოდება ერთწევრი? რას ეწოდება მრავალწევრი? რას ეწოდება კვადრატული სამწევრი? რა ხერხებით შეიძლება დავშალოთ კვადრატული სამწევრი მამრავლებად? რა არის ალგებრული წილადის ძირითადი თვისება?	ასოითი გამოსახულებები და ფორმულები.

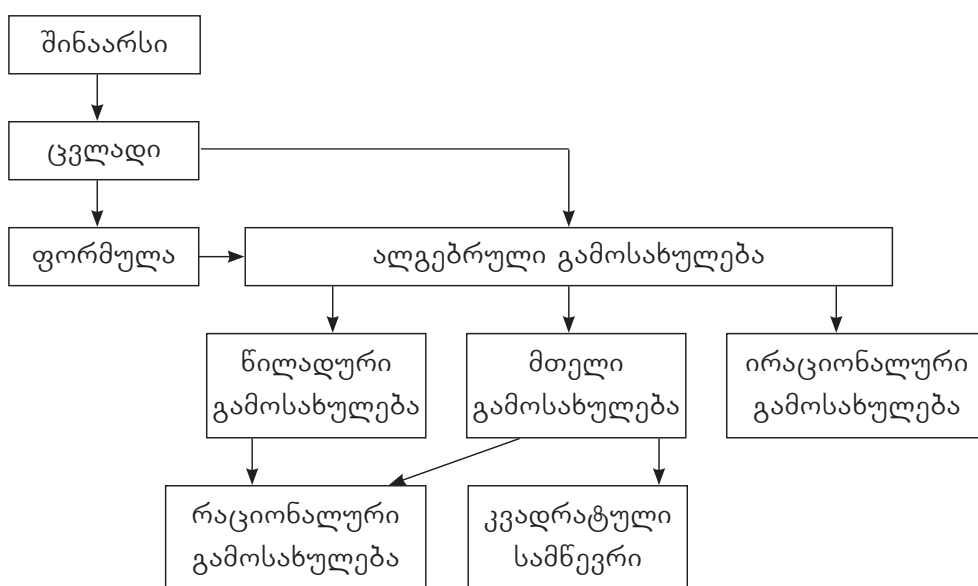
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს: ცვლადის შემოღება და ცვლადების საშუალებით წინადადებების ჩანერა (მაგალითად, რიცხვების თვისებების). ალგებრულ გამოსახულებათა ფორმებს შორის კავშირის დამყარება; მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად, წილადურ გამოსახულებებზე მოქმედებების ჩატარება; კვადრატული სამწევრის წრფივ მამრავლებად დაშლის სხვადასხვა ხერხის გამოყენება.

მეხუთე თავი მათემატიკის მნიშვნელოვან სამიზნე ცნებას — ალგებრული გამოსახულების ცნებას ეხება.

წარმოდგენილი მასალა აღნიშნულ სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხების შესახებ ცოდნის გამეორება და გაღრმავებაა.

მოსწავლეს პირველად ხვდება სისტემაში მოყვანილი მასალა ცვლადისა და ცვლადიანი გამოსახულებების ტიპების შესახებ, მათი სრული დახასიათება. მოსწავლე პოულობს პასუხებს კითხვებზე: რა არის ცვლადი და რისთვის არის საჭირო მათი შემოღება? რა მნიშვნელობა აქვს წინადადებების ჩანერას ფორმულების სახით? მნიშვნელოვანია რიცხვების თვისებების ფორმულებით წარმოდგენა.

I თავში წარმოდგენილი საკითხები შეიძლება სქემატურად ასე წარმოვადგინოთ



5.1. ცვლადების გამოყენების მაგალითები, ფორმულა

პარაგრაფს ცვლადების (ასოების) გამოყენებით ფიზიკურ სიდიდეებს შორის კავშირის აღწერით ვიწყებთ. ამ ამ სიდიდეებს ასოებით აღვნიშნავთ, მათ შორის კავშირს ფორმულა აღწერს. ბევრი მათემატიკური ცნება სასკოლო კურსში არ განიმარტება (საწყისია) და მათი აღწერა უნდა შეძლოს მოსწავლემ. ამასთანავე, ჩვენს კითხვაზე, რა საშუალებით ჩავწერთ მათემატიკაში წინადადებებს, მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვებისა და ასოების დასახელება; რა არის ცვლადი? ამ კითხვას ვერ დავუხვამთ მოსწავლეს; ცნობილი ქართველი მათემატიკოსი შალვა ფხაკაძე [11] ასე აღწერს ამ ცნებას: მათემატიკური თეორიის სიმბოლოს, რომლითაც შეიძლება აღინიშნოს მოცემული E სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, ცვლადი ეწოდება. ჩვენ ხაზს ვუსვამთ იმ ფაქტს, რომ ცვლადები ასოებით არის წარმოდგენილი ჩანაწერებში და განვიხილავთ ცვლადის შემცველ გამოსახულებებს. აქვე ვსაუბრობთ ფორმულის შესახებ, რომელიც მათემატიკური სიმბოლოებით შედგენილი ჩანაწერია, გამოსახავს წინადადებას. მითითებულია ფორმულები მათემატიკიდან, მათგან გამოყოფილია წინადადებები, რომლებზეც შეიძლება ვთქვათ — ჭეშმარიტია, თუ მცდარია. მოსწავლეები იხსენებენ ასეთი წინადადების სახელწოდებას და მიუთითებენ შესაბამის მაგალითებს. მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ცვლადის გამოყენებას უნდა ახლდეს ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლის მითითება.

პარაგრაფის შეჯამების ნაწილშიც მითითებულია პასუხი კითხვაზე: რას ვუნდებთ ცვლადს.

საკონტროლო კითხვებს ვიყენებთ განმავითარებელი შეფასების განსახორციელებლად, რამდენად ყურადღებით ისმენდა მოსწავლე ახსნა-განმარტებებს. მიღებული პასუხების მიხედვით, შეიძლება ჩავინიშნოთ მოსწავლეთა მიღწევის დონეები (მაგალითად, სოლო-ტაქსონომიის მიხედვით). მაგალითად, თუ მოსწავლე პირველ საკონტროლო კითხვაზე დადებითი პასუხის გარდა, შეძლებს კონკრეტული მაგალითების დასახელებასაც, მათ შორის კავშირების დამყარებას, შედარებასა და ანალიზს, მაშინ შეიძლება მიმართებით დონემდეც კი განვიხილოთ მოსწავლის მიღწევა.

ძალიან საინტერესოა მე-3 კითხვაზე პასუხის მოძიება. აქ მოსწავლეებმა შეიძლება საყურდღებო მოსაზრებები გამოთქვან: მაგალითად, „ $x > 0$ “ არ არის გამონათქვამი, მაგრამ „ $x^2 + 1 > 0, x \in \mathbb{R}$ “ ჭეშმარიტი გამონათქვამია; „არსებობს x , რომლისთვისაც $2x = 4$ “ ჭეშმარიტი გამონათქვამია (ის ფორმულის სახით ასე ჩაიწერება $\exists x (2x = 4)$); „ყოველი x -ისთვის $2x = 4$ “ მცდარი გამონათქვამია (ის ფორმულის სახით ასე ჩაიწერება: $\forall x (2x = 4)$).

მასწავლებლებს შევასხენებთ, რომ $\forall$ და $\exists$ სიმბოლოებს ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები ეწოდება. მათ შესახებ მოსწავლეებს ამჯერად არ ვესაუბრებთ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად. კლასში შესასრულებელ „ტესტებში“ ცვლადიანი გამოსახულებების ჩანერის მაგალითებია განხილული. მოსწავლე ეჩვევა წინადადებების ჩანერას ფორმულების სახით. ცვლადების გამოყენებით ჩაიწერება პასუხები

10 და **11** ამოცანებზე.

10 კანფეტების რაოდენობა ჩაიწერება სახით: $5x$. პირობის თანახმად, კანფეტები 3-კილოგრამიან პაკეტებში შეიძლება ჩავაწყოთ, მაშინ, ამ პაკეტების რაოდენობა იქნება $\frac{5x}{3}$. შემდეგი დაზუსტება შეიძლება ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლის მითითებას უკავშირდებოდეს, ცხადია, x სამის ჯერადი ნატურალური რიცხვი უნდა იყოს.

11 ამოცანის კლასში განხილვის შემდეგ დაფასთან გამოძახებული მოსწავლე ამოცანას ასე გამოსახავს:

თუ მანძილს S -ით აღვნიშნავთ, ტურისტების სიჩქარეებს: v_1 -ით და v_2 -ით, მაშინ $v_1 = \frac{S}{a}$, $v_2 = \frac{S}{b}$.

მოსწავლეებმა უნდა მიუთითონ, რომ S არის კმ-ით გამოსახული, სიჩქარე — კმ/სთ-ით.

მოსწავლემ შეიძლება ასე იმსჯელოს: ყოველ საათში ტურისტებს შორის მანძილი $(\frac{S}{a} + \frac{S}{b})$ კმ-ით მცირდება. ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან $S : (\frac{S}{a} + \frac{S}{b})$ საათში.

$$S : \frac{S(a+b)}{ab} = \frac{S \cdot ab}{S \cdot (a+b)} = \frac{ab}{a+b} \text{ (სთ.)}.$$

მოსწავლემ შეიძლება შეხვედრამდე დრო აღნიშნოს და შემოიღოს ახალი t ცვლადი, მაშინ

$$t \cdot v_1 + t \cdot v_2 = S, \\ t = \frac{S}{v_1 + v_2};$$

v_1 და v_2 ცვლადების გამოსახულებების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ იმავე პასუხს.

12 ცხადია, თუ p კენტია მაშინ $2p+1$, $3p$, $p+2$ კენტ რიცხვებს გამოსახავს. მოვითხოვთ დასაბუთება, რომ p^2+p ლუწია. (მართლაც, $p^2+p=p(p+1)$ და $p+1$ ლუწია).

13 ვთხოვთ მოსწავლეებს, ცვლადების საშუალებით გამოსახონ ის ფორმულები, რომლებითაც რიცხვებზე მოქმედებების თვისებებია წარმოდგენილი. მაგალითად,
ა) $1 \cdot a = a$; ბ) $a+0 = a$.

14 მართკუთხედის ფართობი შეიძლება ორგვარად წარმოვადგინოთ
 $a(b+c)$; ან $ab+ac$.
მაშასადამე, $a(b+c) = ab+ac$.

15 ა) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$; ბ) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

16 $a - (b+c+d) = a - b - c - d$;
 $a=543$, $b=100$, $c=20$, $d=6$.

17 სახელმძღვანელოს პასუხებში მითითებული ფორმულების გარდა, შეიძლება სხვა ფორმულებიც შემოგვთავაზონ მოსწავლეებმა. მაგალითად, $a \cdot b \cdot c \cdot d = (ad) \cdot (bc)$ და მიუთითონ ამ ფორმულის გამოყენების უპირატესობა ზოგიერთ შემთხვევაში. მაგალითად,
 $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = (2 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 9) = 630$.

მასწავლებლები, ხშირად, „ტესტებზე“ პასუხების შერჩევის საკუთარ მეთოდს აყალიბებენ. ზოგიერთი მიიჩნევს, რომ საჭიროა პასუხის შერჩევის დასაბუთება, ზოგიერთი — პასუხით კმაყოფილდება. ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება დავსვათ კითხვა: რატომ? (ეს, ძირითადად, საკლასო ტესტებს ეხება). მაგალითად, 6 ტესტზე სწორი პასუხის დასახელების შემდეგ შეიძლება მოვითხოვოთ მსჯელობა: წილადი აზრს კარგავს, როცა მნიშვნელი, $(x+2)$ ნულია, $x+2=0$, როცა $x=-2$. მაშასადამე, სწორი პასუხია -2 .

7) $a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab-ac.$

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიური ხასიათისაა — მოითხოვს ცვლადის შემცველი გამოსახულების შედგენას, ცვლადის სწორად გამოყენების უნარს.

მოსწავლემ უნდა გაარჩიოს ერთმანეთისგან ტერმინები: „მოპირდაპირე“ და „შებრუნებული“. მან უნდა შეძლოს x რიცხვის მოპირდაპირის დასახელება: $(-x)$, a -ს შებრუნებულის დასახელება: $\frac{1}{a}$.

მოსწავლე იხსენებს r -რადიუსიანი წრეწირის სიგრძისა და წრის ფართობის ფორმულებს: $l=2\pi r$, $S=\pi r^2$. ამაში მას ცნობარიც დაეხმარება.

მოსწავლე გაიხსენებს პროცენტს, „პროცენტით გაზრდას“ და  „ტესტის“ პასუხებში იპოვის შესაბამის გამოსახულებას: $1,25x$.  ტესტში: $x+2x=3x$.

 ამოცანა ალგებრული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობის პოვნაზეა. მოსწავლე იხსენებს რიცხვებზე მოქმედებებს.

 თუ 1 კალამი x თეთრი ღირს, მაშინ m კალამი ელირება (mx) თეთრი.

 ამ ამოცანის ანალოგიური კლასში იყო ამოხსნილი. ამ შემთხვევაში დასახელებულია მანძილის მნიშვნელობა, რომელიც კილომეტრებითაა გამოსახული და მოითხოვება შეხვედრამდე დახარჯული დროს გამოთვლა, ეს მომენტი კლასში ამოხსნილის შუალედური საფეხური იყო: $\frac{200}{a+b}$.

პასუხი სხვადასხვა მსჯელობით მიიღება.

მოსწავლეებმა უნდა ახსნან პასუხის მიღების სქემა.

 მოსწავლემ უნდა გაიხსენოს პროცენტი, პროცენტით გაზრდა:

$$V+V\cdot\frac{x}{100}=V(1+\frac{x}{100})$$

$$4V(1+\frac{x}{100})=5V; 4(1+\frac{x}{100})=5; 1+\frac{x}{100}=\frac{125}{100}$$

$$x=25.$$

პასუხი: 25%.

შეიძლება x -ით ის რიცხვი აღვნიშნოთ, რომელიც გვიჩვენებს სიჩქარის გაზრდას.

მაშინ გვექნება:

$$4V(1+x)=5V; 4(1+x)=5; 1+x=1+\frac{1}{4};$$

$$x=\frac{1}{4}. \quad \frac{1}{4}=25\%.$$

 თუ a უარყოფითია, მაშინ a^2 , $-\frac{7}{a}$, $-\frac{1}{a}$ დადებითი რიცხვებია.

 1) $a\cdot 0=0$; 2) $a\cdot(-1)=-a$, თუ $a=-3$, $-a=3$.

 $db-cd=d(b-c).$

 ა) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; ბ) $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$; გ) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$; დ) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$

$$\triangle 20 \quad a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}.$$

$$\triangle 21 \quad ab+cd=b(a+c)-c(b-d).$$

$$\triangle 22 \quad \text{ა) } (a+b+c):m=a:m+b:m+c:m;$$

$$\text{ბ) } (a+b+c+d)m=a\cdot m+b\cdot m+c\cdot m+d\cdot m.$$

5.2. ალგებრული გამოსახულება.

ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა

ამ პარაგრაფის საკითხებით იწყება თემის ძირითად სამიზნე ცნებაზე გადასვლა, რომელიც პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის პროცესში მიმდინარეობს. ვაჯამებთ ჩვენს ცოდნას ცვლადისა და ფორმულის შესახებ. მოსწავლეები, დასმულ კითხვებზე პასუხების მოძიებით, იხსენებენ წინა გაკვეთილებზე განხილულ ცვლადის შემცველ გამოსახულებებს, რომლებითაც სიდიდეებს შორის თანაფარდობები და რიცხვებზე მოქმედებების თვისებები იყო წარმოდგენილი. გაკვეთილის მიმდინარეობისას შეიძლება გამოვიყენოთ თვალსაჩინო საშუალება, მაგალითად, პლაკატი, რომელზეც წარმოდგენილი იქნება გამოსახულებები; ეს გამოსახულებები შედგენილია ცვლადებისგან, რიცხვებისგან, შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფის, რაციონალურ ხარისხში ახარისხების, ამოფესვის ნიშნებისა და ფრჩხილების გამოყენებით. ცალკე შეიძლება გამოიყოს წილადური გამოსახულებები, მთელი გამოსახულებები, ირაციონალური გამოსახულებები. მათი აღწერის შემდეგ, მოსწავლეები მოიფიქრებენ აღნიშნული სახელწოდებების გამოყენების მიზანშეწონილობას.

მნიშვნელოვანია ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლისა და ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობების ცნებების აღწერა.

ცოდნის განმტკიცება „ტესტებითა“ და ამოცანების გამოყენებით მიმდინარეობს.

② ტესტზე პასუხის მოძიებისას, შეიძლება გავიხსენოთ არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრება (იხილეთ, ცნობარი). $\sqrt[4]{2a-3}$ გამოსახულებაში $2a-3 \geq 0$.

③ ტესტში, ცხადია, $x-|x|=x-x=0$, თუ $x \geq 0$;
 $x-|x|=2x$, თუ $x \leq 0$.

ამ გახსენების შემდეგ, გვაქვს: $\sqrt{x-|x|}$ -ში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებია დადებითი რიცხვები და ნული.

④ და ⑤ ტესტებით რაციონალურ და ირაციონალურ გამოსახულებებში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობის პოვნის წესი უნდა გაიაზროს მოსწავლემ.

⑥ ამოცანით მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას იგივეობის (იგივეურად ტოლი გამოსახულებების) შესახებ. აქ შეიძლება მივუთითოთ, რომ იგივეობა ცვლადის შემცველი გამოსახულებების ტოლობაა; მაგალითად, ტოლობა: $2+3=3+2$, რიცხვითი ტოლობაა, ერთი და იმავე რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერებს შორის გვაქვს ტოლობის ნიშანი. აქ სასურველია კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ პასუხები საკონტროლო კითხვებზე (მაგალითად, 2. და 3. კითხვები).

7 იგივეურად ტოლი გამოსახულებებია: $a+b+c$ და $c+b+a$; $(2ab)^2$ და $4a^2b^2$. ტოლობები: $a+b+c=c+b+a$ და $2(ab)^2=4a^2b^2$ იგივეობებია.

8-10 მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობის პოვნა; მთელი და წილადური გამოსახულებების გამოყოფა; $7x^2-2xy$; $\frac{a}{9}$; $\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{3}n^2$ მთელი გამოსახულებებია. $\frac{12}{b}$; $\frac{a}{a+3}-8$ წილადური გამოსახულებებია. მათი საერთო სახელწოდებაა „რაციონალური გამოსახულება“.

11-12 ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობების პოვნა წილადურ გამოსახულებებში ეყრდნობა დებულებას: წილადურ გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობების სიმრავლე შეიცავს იმ რიცხვებს, რომლებისთვისაც ამ გამოსახულებებში შემავალი წილადების მნიშვნელები ნულს არ უდრის.

$\frac{a}{b}$ -ს აზრი არა აქვს, როცა $b=0$; $\frac{a}{b}=0$, როცა $a=0$, $b\neq 0$.

ეს ფაქტები გასათვალისწინებელია 13 ამოცანის ამოხსნისასაც.

14 $\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}$ ტოლობა იგივეობაა, $\frac{-x}{-y}$ და $\frac{x}{y}$ იგივეურად ტოლი გამოსახულებებია (x ; y) წყვილთა იმ სიმრავლეზე, რომლებისთვისაც $y\neq 0$. აქ გვაქვს იგივეური ტოლობა სიმრავლეზე.

საშინაო დავალების შესრულებით, მოსწავლეები გვიჩვენებენ ძირითად სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხების ათვისების დონეს.

ამ დავალებაში „ტესტები“ კლასში შესრულებული „ტესტების“ ანალოგიურია და, ანალოგიური მსჯელობის გამოყენებით, მიიღწევა სწორი პასუხების შერჩევა.

მოითხოვება არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრებისა (შეიძლება ცნობარის გამოყენება) და წილადურ გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობების პოვნის წესის ცოდნა.

ამოსახსნელი ამოცანებიც ძირითად სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებული საკითხების ცოდნას მოითხოვს — რა არის იგივეობა, რას ეწოდება იგივეურად ტოლი გამოსახულებები, როგორ ვპოულობთ ალგებრული გამოსახულების განსაზღვრის არეს, ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვის არის ნულის ტოლი წილადური გამოსახულება, რას ნიშნავს წილადური გამოსახულებების იგივეური ტოლობა (განიხილება იგივეური ტოლობა სიმრავლეზე).

5.3. ერთნევრი და მრავალნევრი. მოქმედებები ერთნევრებზე და მრავალნევრებზე. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

მათემატიკის ახალი სტანდარტის შესაბამისად, X კლასში მათემატიკის სწავლების მიზნების გათვალისწინებით, ვიმეორებთ და ვიღრმავებთ ცოდნას ძირითად სამიზნე ცნებასთან (ალგებრული გამოსახულება) დაკავშირებული იმ საკითხების შესახებ, რომელთა შესწავლა მოსწავლეებმა მე-7 კლასიდან დაიწყეს. დაწვრილებით განვიხილავთ კერძო სახის ალგებრულ გამოსახულებებს — მთელ გამოსახულებებს — ერთნევრს, მრავალნევრს, მოქმედებებს ერთნევრებზე, მრავალნევრებზე.

ერთნევრი ჩვენთან კერძო სახის მრავალნევრია. ზოგიერთ უცხოურ სასკოლო სახელმძღვანელოშიც ასეა მითითებული. ეს ეთანხმება x -ის მიმართ მრავალნევრების თეორიას, როცა ნულოვანი მრავალნევრიც გვაქვს და, მაგალითად, ax^2 არის x -ის მიმართ კვადრატული სამნევრი.

ტექსტში დასმულ კითხვებზე პასუხები მოსწავლემ შეიძლება ცნობარის საშუალებითაც მოიძიოს. თუმცა, განხილული მაგალითებიც დაეხმარება მას. სასურველია, მაგალითების განხილვას ახლდეს შესაბამისი წესების ჩამოყალიბება (ერთნევრის მრავალნევრზე გამრავლების, მრავალნევრების გამრავლების).

ამასთანავე, შემოკლებული გამრავლების ფორმულებიც ამ წესების გამოყენებით შეიძლება დაასაბუთოს მოსწავლემ.

ყველა ამ წესის გახსენებასა და შესაბამისი ცოდნის განმტკიცებას ემსახურება ამოცანების ამოხსნა.

„ტესტურ“ დავალებებში ვიყენებთ ფრჩხილების გახსნის ხერხს, ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატის ფორმულას, ორი გამოსახულების სხვაობის კუბის ფორმულას. მრავალნევრის მამრავლებად დაშლისას ვიყენებთ დაჯგუფების ხერხსაც.

8 თუ $n^2 - m^2 = 7$, მაშინ $(n-m)(n+m) = 7$; რადგან m და n ნატურალური რიცხვებია, შესაძლებელია მხოლოდ შემდეგი შემთხვევა: $n-m=1$ და $n+m=7$, ანუ $n=4$, $m=3$. ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება ზეპირადაც მიაგნოს ამ რიცხვებს. ამ შემთხვევაში მათ იმის ჩვენებაც მოუწევთ, რომ სხვა ასეთი რიცხვები არ არსებობს; თუმცა, სინჯვისა და ამოწურვის ხერხით დასაბუთება ადვილად მიიღწევა.

9 ვიყენებთ დაჯგუფების ხერხს. მოსწავლეთა მოსაზრებების განხილვის კვალობაზე, დაფასთან გამოძახებული მოსწავლეები ადვილად მოახერხებენ ა) და ბ) შემთხვევების განხილვას. გ) შემთხვევაში შეიძლება სხვა მოსწავლეების ჩარევაც გახდეს საჭირო: ხომ არ ჯობია სამნევრი ოთხნევრად ვაქციოთ?

$$\begin{aligned} x^3 - x - 2x - 2 &= x(x^2 - 1) - 2(x+1) = x(x+1)(x-1) - 2(x+1) = (x+1)(x^2 - x - 2) = \\ &= (x+1)(x^2 - 2x + x - 2) = (x+1)(x(x-2) + (x-2)) = (x+1)(x-2)(x+1) = (x+1)^2(x-2). \end{aligned}$$

შეიძლება მოცემული გამოსახულება ასეც გარდავექმნათ:

$$x^3 - 3x + 1 - 3 = (x^3 + 1) - 3(x+1) = (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x+1) = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

შემდეგ გავაგრძელოთ ისე, როგორც ზემოთ იყო შესრულებული.

10 ა) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = x^2(x-3) + 5(x-3) = (x-3)(x^2+5);$

ბ) $x^4 + y^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy);$

გ) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$

ბ) და გ) შემთხვევები კლასში ერთობლივი ძალისხმევით განიხილება. მოსწავლეები წამოაყენებენ საკუთარ მოსაზრებებს და მათგან შეირჩევა ამოხნის სწორი მიმართულება. დამატებითი კითხვებით შეიძლება ჩვენც დავეხმაროთ;

— შეიძლება x^4+y^4 დავშალოთ მამრავლებად? რა წევრის მიმატებით მიიღება ორწევრის კვადრეტი?

— როგორ შეიძლება „შევაგოსოთ“ x^4+x^2+1 გამოსახულება ორწევრის კვადრატამდე?

11 ბ) შემთხვევის გარდა შეიძლება ასეთი ხერხიც განვიხილოთ:

$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2.$$

12 მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ შესაბამისი ცვლადიანი გამოსახულების შედგენა: $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$;

$$2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=2^n+2\cdot 2^n+4\cdot 2^n=2^n\cdot(1+2+4)=7\cdot 2^n;$$

რადგან $n\in\mathbb{N}$, ამიტომ $7\cdot 2^n$ იყოფა 14-ზე.

13 $(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)=xy+x+y+1-xy+x+y-1=2(x+y)=18.$

14 $(x^2-10x+6)\cdot(2x+k)$ ნამრავლი მივიყვანოთ სტანდარტულ სახემდე:

$$2x^3+kx^2-20x^2-10kx+12x+6k=2x^3+(k-20)x^2+2x(6-5k)+6k$$

პირობის თანახმად, $k-20=0$, $k=20$.

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება თავიდანვე მხოლოდ x^2 -ის კოეფიციენტის დადგენაზე იზრუნოს და ასე მიაკვლიოს k -ს მნიშვნელობას.

საშინაო დავალების შესრულებისას, მოსწავლეები ერთწევრებსა და მრავალწევრებზე მოქმედებების ანალოგიურ თვისებებს იყენებენ. ეს, ძირითადად, „ტესტურ“ დავალებებს ეხება.

მაგალითად, **5** „ტესტის“ პასუხი კუბების ჯამის ნამრავლის სახით წარმოდგენას ეყრდნობა:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

კიდევ ერთხელ შევამოწმოთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულების ათვისება. ამასთანავე, მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამ ფორმულების „მარჯვნიდან მარცხნივ“ წარმოდგენაც; მაგალითად, $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$; $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$. მათ „შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს“ აღარ ვუწოდებთ. ისინი მრავალწევრების ნამრავლების სახით წარმოდგენისას გამოიყენება.

7 5 მომდევნო ლუწი ნატურალური რიცხვი, რომელთაგან უმცირესია n , ასე ჩაინერება: n , $n+2$, $n+4$, $n+6$, $n+8$.

მათი ჯამი არის $5n+20$.

8 თუ $n^2-m^2=20$, მაშინ $(n+m)(n-m)=20$.

„სინჯვისა და ამოწურვის მეთოდი“ გვაძლევს მხოლოდ ერთ შესაძლო შემთხვევას.

$n+m=10$ და $n-m=2$. (ვითვალისწინებთ, რომ n და m ლუწი რიცხვებია), საიდანაც ვღებულობთ: $n=6$, $m=4$.

ამ რიცხვების პოვნა ზეპირადაც შეიძლება.

10 გვაქვს, m , $m-2$, $m-4$, $m-6$, $m-8$. მათი ჯამია: $5m-20$.

11 გავიხსენოთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა სამ ქვესიმრავლედ: ნატურალური რიცხვები, რომლებიც იყოფა 3-ზე: $3n$; რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში

იდლევა 1-ს: $3n-2$; რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში იდლევა 2-ს: $3n-1$. აქ ყველგან — $n \in \mathbb{N}$.

$$(3n-2)^2-1=9n^2-12n+4-1=3(3n^2-4n+1);$$

$$(3n-1)^2-1=9n^2-6n+1-1=3n(3n-2).$$

12 $(x^2-5x+6)(x+k)=x^3-5x^2+6x+kx^2-5kx+6k=x^3+x^2(k-5)+x(6-5k)+6k.$

პირობის თანახმად, $k-5=0$, $k=5$.

გაითვალისწინეთ **14** ამოცანის ამოხსნისას გაკეთებული კომენტარი.

13 $\overline{abc}-\overline{ac}=100a+10b+c-(10a+c)=90a+10b.$

14 $x+y=2,8$, $(x+y)^2=7,84$

$$x^2+y^2+2xy=7,84$$

$$4,04+2xy=7,84, \quad 2xy=3,8$$

$$xy=1,9.$$

15 ანალოგიური ამოცანები კლასში იყო ამოხსნილი

ბ) $x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy);$

გ) $x^8+x^4-2=(x^8-1)+(x^4-1)=(x^4-1)(x^4+1)+(x^4-1)=(x^4-1)(x^4+1+1)=(x^4-1)(x^4+1+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+2)=$
 $=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+2);$

დ) $x^5-x^2-x-1=x^5-x-(x^2+1)=x(x^2+1)(x^2-1)-(x^2+1)=(x^2+1)(x^3-x-1);$

ე) $x^4-3x^2-6x-3=x^4-3(x^2+2x+1)=x^4-3(x+1)^2=(x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}).$

5.4. კვადრატული სამწევრი. კვადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად

პირველი და მეორე ხარისხის მრავალწევრების განხილვა პრაქტიკული ამოცანების საშუალებით იწყება. x -ის მიმართ მრავალწევრთა თეორიის სრული შესწავლა უმაღლეს სკოლაში, ალგებრის კურსში ხდება. სკოლაში, ძირითადად, კვადრატული სამწევრის ნულებისა და მამრავლებად დაშლის საკითხი განიხილება. მოსწავლეებმა ამ საკითხების შესწავლა წინა წლებში დაიწყეს. ამჯერად ვიმეორებთ და ვიღრმავებთ ცოდნას ამ მიმართულებით. ყურადღებას ვამახვილებთ კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლის სხვადასხვა ხერხზე. კვადრატული სამწევრის განსაზღვრებაც ამართლებს მრავალწევრის ცნების იმ განსაზღვრას, რომელიც წინა პარაგრაფში წარმოვადგინეთ; მაგალითად, ax^2 ერთწევრი კვადრატული სამწევრია: ax^2+bx+c , რომელშიც $b=0$, $c=0$. სამწევრის განსაზღვრაში მოითხოვება მხოლოდ ერთი პირობა: $a \neq 0$.

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემით, მოსწავლეები ადასტურებენ კვადრატული სამწევრის შესახებ იმ ცოდნის გააქტიურებას, რომელიც უკავშირდება კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტის, ფესვების და ფესვების მიხედვით სამწევრის დაშლის ცნებებს.

მოსწავლეთა ყურადღება მუდმივად გავამახვილოთ იმ ფაქტზე, რომ ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის პირველი კოეფიციენტი ნულისგან განსხვავებული რიცხვია; კვადრატულ სამწევრს აქვს: ერთი ფესვი (როცა $D=0$); ორი ფესვი (როცა $D>0$), ან არ აქვს

ფესვი (როცა $D < 0$). ამ კითხვებზე პასუხების ცოდნას, მოსწავლეები „ტესტებზე“ სწორი პასუხების მითითებით ადასტურებენ.

⑥ „თუ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ნაკლებია 0-ზე, მაშინ ამ კვადრატულ სამწევრს არ აქვს ფესვი“. შებრუნებული დებულება: „თუ კვადრატულ სამწევრს არ აქვს ფესვი, მაშინ დისკრიმინანტი ნაკლებია 0-ზე“ — ჭეშმარიტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ($D > 0$, $D = 0$) გვექნებოდა, რომ სამწევრს აქვს ორი ფესვი ან ერთი ფესვი.

მოპირდაპირე დებულება: „თუ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი არ არის ნაკლები 0-ზე (მეტია ან ტოლია ნულის), მაშინ კვადრატულ სამწევრს აქვს ფესვი (როცა $D > 0$, აქვს ორი ფესვი, როცა $D = 0$ — ერთი ფესვი) — ჭეშმარიტია. კონტრაპოზიციური დებულებაა „თუ კვადრატულ სამწევრს აქვს ფესვი, მაშინ სამწევრის დისკრიმინანტი არ არის ნაკლები ნულზე“ — ჭეშმარიტია, რადგან პირდაპირი დებულება ჭეშმარიტია.

⑦ ა) „თუ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი მეტია ნულზე, მაშინ კვადრატულ სამწევრს ორი ფესვი აქვს“. შებრუნებული: „თუ კვადრატულ სამწევრს ორი ფესვი აქვს, მაშინ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი მეტია ნულზე“, — ჭეშმარიტია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ($D < 0$, ან $D = 0$), კვადრატულ სამწევრს არ ექნებოდა ფესვი, ან ექნებოდა ერთი ფესვი.

გ) „თუ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე, მაშინ კვადრატულ სამწევრს არ აქვს ფესვი“. შებრუნებული: „თუ კვადრატულ სამწევრს არ აქვს ფესვი, მაშინ დისკრიმინანტი ნაკლებია ნულზე“ — ჭეშმარიტია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში ($D \geq 0$), კვადრატულ სამწევრს ექნებოდა ერთი ან ორი ფესვი.

აქ შეიძლება გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე, რომ სამივე პირდაპირი თეორემა ყველა შესაძლებელ შემთხვევას ამოწურავს ($D > 0$, $D = 0$, $D < 0$) და ყველა პირდაპირი თეორემა ჭეშმარიტია, ამიტომ ყველა შებრუნებული დებულებაც ჭეშმარიტია (ამაში, სანაწინააღმდეგოს დაშვების ხერხის გამოყენება გვეხმარება).

⑧ ვიეტის თეორემის თანახმად (ეს თეორემა უკვე იყო განხილული, შეიძლება იხილოთ ცნობარიც),

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = k - 1. \end{cases}$$

მაშასადამე, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = k^2 + 4k + 4 - 2k + 2 = k^2 + 2k + 6 = (k + 1)^2 + 5$. ჯამი უმცირესია, როცა $k = -1$.

პასუხი: $k = -1$.

⑨ $x^2 - ax + b = x^2 - x + 0,25$.

პირობით, ეს ტოლობა სრულდება ნებისმიერი x -ისთვის. მაშასადამე, $-a = -1$ და $b = 0,25$, $a + b = 1,25$.

შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ:

თუ $x = -1$, $1 + a + b = 1 + 1 + 0,25$
 $a + b = 1,25$.

⑩ ვიეტის თეორემის თანახმად (იხილეთ ცნობარი), $5 + x_2 = 4$, $x_2 = -1$, $b = 5 \cdot (-1) = -5$.

⑪ პირობის თანახმად, $2 + 5 + b = 9$, $b = 2$. ვიეტის თეორემის თანახმად, $x_1x_2 = \frac{b}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

12) ვიყენებთ ვიეტის თეორემას:

$$6k - (3k + 2) = 16, \quad 3k - 2 = 16, \quad k = 6.$$

მიღებული $x^2 - 20x + 36 = 0$ განტოლების ფესვები შეიძლება ფესვთა ფორმულების გამოყენებით ვიპოვოთ, შეიძლება — ვიეტის ფორმულებით.

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 20 & \\ x_1 \cdot x_2 = 36 & \end{array} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 18.$$

13) $ax^2 + (a+c)x + c$; მოსწავლეები, შესაძლებელია, ზეპირად მიაგნებენ ერთ-ერთ ფესვს: $x = -1$;

$$a + c - (a + c) = 0.$$

შეიძლება ასეც:

$$ax^2 + (a+c)x + c = ax(x+1) + c(x+1) = (x+1)(ax+c).$$

14)

$$ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} & x_1^2 + \frac{2c}{a} + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} & x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}. \end{array}$$

15)

$$\begin{cases} 4 + 2p + q = 17 \\ 1 - p + q = 2 \\ 3 + 3p = 15, \\ p = 4, \quad q = 5. \end{cases}$$

16)

$$x^2 - 2x - 120 = (x-1)^2 - 121.$$

კვადრატული სამწევრი უმცირეს მნიშვნელობას იღებს, როცა $x = 1$; ეს უმცირესი მნიშვნელობა არის -121 .

17)

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6,25 - 6,25) - 6 = -(x - 2,5)^2 + 6,25 - 6 = -(x - 2,5)^2 + 0,25.$$

მისი მნიშვნელობა უდიდესია, როცა $x = 2,5$. უდიდესი მნიშვნელობაა $0,25$.

საშინაო დავალების „ტესტებზე“ სწორი პასუხების შერჩევით მოსწავლეები ადასტურებენ და იმყარებენ კვადრატული სამწევრის ცნებისა და ფესვების შესახებ ცოდნას.

7

$$D < 0, \quad 144 - 24a < 0, \quad 24a > 144, \quad a > 6.$$

საშინაო დავალების ამოცანების ამოხსნა საკლასო დავალებების ანალოგიურია.

8

$$4 + 10 + b = 8, \quad b = -6; \\ x^2 + 5x - 6 = 0, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

9

$$\text{როცა } x = 1, \text{ მივიღებთ: } a + b + c = -4.$$

10

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-p}{q}.$$

11 $D < 0, \frac{D}{4} < 0,$

$k^2 - k^2 - k < 0, -k < 0, k > 0.$

უმცირესი მთელი მნიშვნელობაა $k=1$.

12 გ) $x^2 - 7x + 15 = (x - 3,5)^2 - 12,25 + 15 = (x - 3,5)^2 + 2,75;$

მისი მნიშვნელობა უმცირესია, როცა $x=3,5$.

უმცირესი მნიშვნელობაა 2,75.

დ) $x^2 + 9x + 13 = (x + 4,5)^2 - 20,25 + 13 = (x + 4,5)^2 - 7,25;$

უმცირესი მნიშვნელობაა -7,25.

5.5. ალგებრული წილადები. მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე

X კლასში მათემატიკის სწავლების მიზნებს შეესაბამება ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების ჩატარების გამეორება.

ალგებრული წილადის ცნება უფრო მთელ გამოსახულებებთან არის დაკავშირებული; ყოველი მრავალწევრი ალგებრული წილადია; განვიხილავთ ისეთ ალგებრულ წილადებს, რომლებიც ორი მრავალწევრის შეფარდებაა, რაციონალური ალგებრული გამოსახულებაა, ისინი არ შეიცავენ ცვლადს ფესვის ნიშნის ქვეშ. მრავალწევრი შეიძლება რიცხვიც იყოს.

წილადებთან ანალოგია ეხმარება მოსწავლეებს ალგებრული წილადის ძირითადი თვისების გააზრებაში. მოსწავლეთა მოტივაციას ზრდის პრაქტიკული მაგალითი, რომელიც ნიუტონის მიზიდულობის კანონის მათემატიკურ ჩანერას უკავშირდება — მიზიდულობის ძალა გამოსახულია ალგებრული წილადით. ალგებრული წილადის ძირითადი თვისება გვეხმარება ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების ჩატარებაში.

მაგალითების სახით წარმოდგენილია ალგებრული წილადის შეკვეცა, ალგებრული წილადების საერთო მნიშვნელამდე მიყვანა, ალგებრულ წილადებზე გამრავლების, გაყოფის, ახარისხების (მთელ ხარისხში) მოქმედებების ჩატარება.

საკვანძო შეკითხვები: რას ეწოდება წილადური გამოსახულება? რა სახის ალგებრულ წილადებს განვიხილავთ? ეხმარება მოსწავლეებს გაიაზრონ წილადური გამოსახულები-სა და ალგებრული წილადის ცნებები, მათ შორის კავშირი და განსხვავება. ალგებრული წილადური გამოსახულება უნდა შეიცავდეს ცვლადზე გაყოფას, შეიძლება ფესვსაც კი ცვლადიდან. განხილული ალგებრული წილადი კი ორი მრავალწევრის შეფარდებაა. მას შეიძლება მიეცეს წილადის სახე, არ არის აუცილებელი, რომ მნიშვნელი შეიცავდეს ცვლადს. სასურველია, გაკვეთილზე ყველა მაგალითი დაწვრილებით განვიხილოთ. მოსწავლეები, ამასთანავე, რიცხვებზე მოქმედებებსაც იხსენებენ და გამოიმუშავენ ალგებრულ გამოსახულებებზე მოქმედებების ჩატარების ჩვევებს.

თეორიული მასალის შესახებ ცოდნის განტკიცებას ემსახურება „ტესტური“ დავალებების შესრულება. მოითხოვება ალგებრულ წილადში შემავალი ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობების განსაზღვრა; მარტივი გამოთვლების ჩატარება შეკვეცასა და ალგებრული წილადების შეკრებაზე.

⑤ მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ $(x-2)^2+(y+3)^2=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=2$ და $y=-3$. მაშასადამე, გამოსახულებას არ აქვს აზრი, როცა ან $x=0$, ან $y=0$, ან $x=2$ და $y=-3$.

⑥ და ⑦ ამოცანებში მოსწავლემ უნდა შეძლოს ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების შესრულება, შეკვეცა, საერთო მნიშვნელამდე მიყვანა და შეკრება.

$$\begin{aligned}\text{მაგალითად, } \frac{3m}{an+am} \cdot \frac{2n}{bn+bm} &= \frac{3m}{a(n+m)} \cdot \frac{b(n+m)}{2n} = \frac{3bm}{2an}, \\ \frac{x+4}{1-3x} - \frac{8-2x}{3x-1} &= \frac{x+4}{1-3x} + \frac{8-2x}{1-3x} = \frac{12-x}{1-3x}.\end{aligned}$$

შემდეგი ამოცანებიც ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების ჩატარებას უკავშირდება. გამოვარჩევთ ⑫ დავალებას:

ბ) ალგებრული წილადი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{x^{12}-5x^3}{9x^2} + \frac{x-144}{9x^2} = \frac{x^{10}-5x}{9} + \frac{x-144}{9x^2}.$$

ალგებრული წილადი შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\frac{x^{11}-5x^2+1}{9x} - \frac{16}{x^2}.$$

⑬ ვცდილობთ, მრიცხველში $(2n-1)$ -ის შემცველი ნამრავლები მივიღოთ; თავდაპირველად ვცდილობთ გამოვყოთ $(2n^2-n)$, რომელიც, ცხადია, ასე წარმოიდგინება: $n(2n-1)$; ამისათვის $7n$ -ს ჩავწერთ, როგორც $-n+8n$. შემდეგ, ანალოგიური მიზნით, $(8n-1)$ -ს ასე ჩავწერთ: $8n-4+3$. მივიღებთ:

$$\frac{2n^2+7n-1}{2n-1} = \frac{2n^2-n+8n-4+3}{2n-1} = \frac{n(2n-1)+4(2n-1)+3}{2n-1} = n+4+\frac{3}{2n-1}.$$

ანალოგიური მსჯელობის ჩატარება სჭირდება საშინაო დავალების ⑰ ამოცანას.

ცხადია, შესაძლებელია, სხვა ხერხის გამოყენებაც. მასწავლებელმა კი იცის, რომ მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფის შესრულების გამოყენებაც შეიძლება (ისწავლება უმაღლეს სკოლაში). შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ (ბეზუს თეორემის გამოყენებით):

$$\begin{aligned}\text{თუ ალგებრულ წილადს მივცემთ სახეს: } \frac{n^2+\frac{7}{2}n-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}, \text{ მაშინ} \\ n^2+\frac{7}{2}n-\frac{1}{2} = (n-\frac{1}{2})(n-\alpha) + (\frac{1}{4}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

აქ II შესაკრები მრიცხველის მნიშვნელობაა, როცა $n=\frac{1}{2}$.

ამ ტოლობიდან ადვილად ვიპოვიტ α -ს:

$$\begin{aligned}n^2+\frac{7}{2}n-\frac{1}{2} &= n^2 - (\frac{1}{2}+\alpha)n + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \\ -(\alpha+\frac{1}{2}) &= \frac{7}{2}, \quad \alpha = -4.\end{aligned}$$

$$\text{მივიღეთ: } \frac{n^2+\frac{7}{2}n-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} = (n+4) + \frac{3}{2n-1}.$$

მიღებული ტოლობის გამოყენებით დავადგენთ, რომ ალგებრული წილადის მნიშვნელობა ნატურალური რიცხვია, როცა $2n-1=\pm 1$, ან $2n-1=\pm 3$. მაშასადამე, $n=1$, $n=0$, $n=2$ ან $n=-1$.

$$\triangle 18 \quad \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x+2a-5b}{(x-5)(x+2)}.$$

ცხადია, x განსხვავებულია 5-ისა და (-2) -ისგან.

მაგალითად, თუ $x=0$, მივიღებთ:

$$2a-5b=31.$$

თუ $x=1$, $3a-4b=36$.

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ: $a=8$, $b=-3$.

საშინაო დავალების „ტესტები“ საკლასო დავალების ანალოგიურ ამოცანებს შეიცავს.

$$\triangle 6 \quad a+b = \frac{ab(a+b)}{ab} = \frac{a^2b+ab^2}{ab}.$$

$$\triangle 7 \quad \frac{2a}{b(x+y)} = \frac{2a(x-y)}{b(x+y)(x-y)}.$$

$$\triangle 9 \quad \text{ბ) } \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3} = \frac{x(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} = \frac{x}{x+y}.$$

$$\triangle 10 \quad 5x-3 \neq 0, \quad x \neq \frac{3}{5} \quad \text{და} \quad x+4 \neq 0, \quad x \neq -4.$$

$\triangle 11$ - $\triangle 15$ ამოცანების ამოხსნით მოსწავლე ადასტურებს ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების ჩატარების ცოდნას.

$$\triangle 16 \quad \text{ა) } \frac{x(x-5)+6}{x-5} = x + \frac{6}{x-5};$$

$$\begin{aligned} \text{ბ) } \frac{x^2-10x+21}{x-2} &= \frac{x^2-2x-8x+21}{x-2} = \frac{x^2-2x-8x+16-16+21}{x-2} = \\ &= \frac{x(x-2)-8(x-2)+5}{x-2} = x-8 + \frac{5}{x-2}. \end{aligned}$$

კლასში ამოხსნილი ამოცანის ამოხსნიდან მიღებული გამოცდილებით, მოსწავლემ უნდა შეძლოს მრიცხველის მითითებული სახით გარდაქმნა.

$\triangle 17$ ეს ამოცანა კლასში ამოხსნილი ამოცანის ანალოგიურია, მაგრამ მოსწავლისგან მოითხოვს მრიცხველის გარდაქმნის გზის მიგნებას.

$$\frac{4x^2-4x+1}{2x+1} = \frac{4x^2+2x-6x-3+4}{2x+1} = \frac{2x(2x+1)-3(2x+1)+4}{2x+1} = 2x-3 + \frac{4}{2x+1}.$$

მიღებული გამოსახულება მთელია, როცა $2x+1=1$, $2x+1=-1$;

აქედან გვაქვს: $x=0$, $x=-1$.

$2x+1=\pm 2$ ან $2x+1=\pm 4$ ეს განტოლებები მთელ რიცხვებში არ იხსნება. მაშასადამე, x -ის ნატურალური მნიშვნელობა არ არსებობს.

$$\triangle 18 \quad \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a-3b}{(x-3)(x+1)}.$$

$$\text{თუ } x=0, \quad \text{მაშინ } a-3b=15, \quad \left| \quad 2a-6b=30; \right.$$

$$\text{თუ } x=1, \quad \text{მაშინ } 2a-2b=18. \quad \left| \right.$$

მაშასადამე, $-4b=12$, $b=-3$, $a=15-9=6$.

კომპლექსური დავალების შესრულება I თავის სამიზნე ცნებას უკავშირდება. კითხვები ამ ცნებასთან დაკავშირებით არის დასმული. კომპლექსური დავალების შინაარსი მოიცავს აღნიშნულ სამიზნე ცნებასთან დაკავშირებულ ისტორიული მიმოხილვის შესრულებასაც და გამოყენების ნიმუშების მოძიებასაც. შეიძლება მოძიება, რომ ასოითი

სიმბოლიკის შემოტანისა და დამკვიდრების ინიციატორი ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი ფრანსუა ვიეტი (1540-1603) იყო. მას „ალგებრის მამად“ მოიხსენიებდნენ. ალგებრა მათემატიკის ნაწილია, რომლის შესწავლის ობიექტი, ძირითადად, ცვლადიანი გამოსახულებები, ცვლადიანი გამოსახულებების გარდაქმნები და მოქმედებათა თვისებების შესწავლა იყო. მოსწავლემ შეიძლება გამოიყენოს სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მასალა და აღწეროს ცვლადთან და ალგებრულ გამოსახულებასთან დაკავშირებული ცნებები. შეიძლება წარმოადგინოს ალგებრულ წილადებზე მოქმედებების ნიმუშები.

მნიშვნელოვანია საუბარი ტოლობის, იგივეობისა და განტოლების შესახებ. ტოლობა შეიძლება გამოვიყენოთ ორ რიცხვით გამოსახულებას შორის; როცა ამ რიცხვითი გამოსახულებების მნიშვნელობები ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, მაშინ ტოლობა ჭეშმარიტ გამონათქვამს წარმოგვიდგენს.

თუ ტოლობა შეიცავს ცვლადს, მაშინ იმის მიხედვით, როგორია ჩვენი დამოკიდებულება ამ ცვლადების შემცველი ტოლობისადმი, გვაქვს იგივეობა, ან გვაქვს განტოლება. თუ ცვლადის შემცველ ტოლობას ახლავს ამოცანის დასმა — ვიპოვოთ ცვლადის ის მნიშვნელობები, რომლისთვისაც ტოლობა ჭეშმარიტია, მაშინ განტოლება გვაქვს. შეიძლება დაისვას კითხვა — თუ ტოლობა ჭეშმარიტია ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის რაიმე სიმრავლიდან, მაშინ გვაქვს იგივეობა ამ სიმრავლეზე.

მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ფორმულები ფიზიკიდან, ქიმიიდან. მაგალითად, მსოფლიო მიზიდულობის კანონის ამსახველი ფორმულა და აღწეროს მასში შემავალ სიდიდეთა ზომის ერთეულები; თანაბარი, ან თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას მანძილის დროზე დამოკიდებულების ფორმულა; წრენირზე თანაბარი მოძრაობისას წირითი სიჩქარის ფორმულა (გამოსახვა წრენირის რადიუსითა და ბრუნვის პერიოდით); ნიუტონის კანონების გამომსახველი ფორმულები, დრეკადობის ძალის ფორმულა (დამოკიდებულება დრეკადობის ძალასა და დეფორმაციის სიდიდეებს შორის); რიცხვის სტანდარტული ფორმით ჩანერა გამოვიყენეთ ქიმიაში „დიდი“ რიცხვების ჩასანერად; ავოგადროს რიცხვი — 12 გრამ ნახშირბადში (1 მოლი ნახშირბადი) ატომების რიცხვი მიახლოებით ასე ჩაინერება $6 \cdot 10^{23}$. მოსწავლემ შეიძლება მაგალითიც მოიყვანოს, როცა ქიმია ცვლადებს დამატებით პირობებს ადებს; მაგალითად, $12x + y = 16$ განტოლებას მთელ რიცხვებშიც უამრავი ამონახსნი აქვს. მაგრამ ქიმიაში განტოლება ნახშირწყალბადში, რომელიც მოიცემა C_xH_y ფორმულით (სადაც x და y ნატურალური რიცხვებია) მოლეკულურ (მოლურ) მასას აღწერს (12 — ნახშირბადის ატომური მასა, 1 — წყალბადის). 16-ის ტოლი მოლეკულური მასა ერთადერთ ნახშირწყალბადის ნაერთს აქვს — მეთანს, რომელიც ასე ჩაინერება CH_4 ; მაშასადამე, ამ განტოლების მხოლოდ ერთ ამონახსნს აქვს აზრი ქიმიაში: $x=1$, $y=4$. მეთანის მოლური მასაა 16,043 გ/მოლი.

მეთავაზებული დავალებების შესრულებით მოსწავლე გაიწაფება ფორმულების გამოყენებით პრაქტიკული ხასიათის პრობლემების გადაჭრაში.

კომპლექსური დავალება მდიდარ მასალას მოიაზრებს, რომელთა კვლევა მოსწავლეს შესაძლებლობას მისცემს, სრულიად გამოავლინოს შემოქმედებითი უნარები — მიაღწიოს შეფასების მიმართებით დონეს სოლო ტაქსონომიის კლასიფიკაციით.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

თემა: ალგებრული გამოსახულება.

საკითხები: ცვლადის შემცველი გამოსახულება; ირაციონალური და რაციონალური ალგებრული გამოსახულებები. მრავალწევრი, მრავალწევრის სტანდარტული სახე. კვადრატული სამწევრი.

მკვიდრი წარმოდგენები: კვადრატული სამწევრი x უცნობის მიმართ მეორე ხარისხის მრავალწევრია; კვადრატული სამწევრის ფესვების პოვნა შეიძლება კვადრატული განტოლების ამოხსნით, ან ზეპირად, ვიეტის თეორემის გამოყენებით. ალგებრული წილადის ძირითადი თვისება გამოიყენება ამ წილადების გამარტივებისა და მათზე მოქმედებების ჩასატარებლად.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს: უცნობი სიდიდის წარმოდგენა ცვლადით, ალგებრულ გამოსახულებათა ფორმებს შორის კავშირის დამყარება (მათ. საშ. 2).

სავარაუდო დრო: 2 სთ.

თვითშეფასების ტესტს მოსწავლე დამოუკიდებლად ასრულებს. შედეგები კლასში განიხილება. მოსწავლეებმა უნდა თამამად ისაუბრონ აღმოჩენილ ხარვეზებზე. მასწავლებელი ითვალისწინებს მოსწავლეთა მოსაზრებებს, იყენებს V თავის შესაბამის დამატებით ამოცანებს და აქტიურად მიმართავს განმავითარებელ შეფასებას ცოდნაში ხარვეზების აღმოფხვრის მიზნით.

მოთხოვნები ამოცანების ამოსახსნელად.

① I-ის სიჩქარე — V ,
II-ის სიჩქარე — $V+10$, მაშინ
$$t(V+V+10)=S, \quad t=\frac{S}{2V+10}.$$

② მოსწავლემ უნდა შეძლოს წინადადების ჩანერგა მათემატიკური სიმბოლოების გამოყენებით; მაგალითად, გ) $2m$ რიცხვის

შებრუნებული რიცხვი — $\frac{1}{2m}$
მოპირდაპირე — $(-2m)$

სხვაობის კვადრატი — $\left(\frac{1}{2m}+2m\right)^2$

ალგებრული წილადი: $\frac{(4m^2+1)^2}{4m^2} = \frac{16m^4+8m^2+1}{4m^2}.$

③ ბ) $5+x \geq 0, x \geq -5; [-5; +\infty)$; ა) და გ) — x ნებისმიერია; დ) $x \neq -2$.

④ ა) $\frac{\sqrt[3]{(x-4)(x^2+4x+16)}}{\sqrt[3]{x^2+4x+16}} = \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{27} = 3.$

⑤ $n+n+2+n+4+n+6+n+8=5n+20=5(n+4).$

n ლუნია, ამიტომ $(n+4)$ ლუნია; $5(n+4)$ იყოფა 10-ზე.

⑥ $(x^2+mx)(x-n+1)=x^3-nx^2+x^2+mx^2-mnx+mx=x^3+x^2(m-n+1)+x(m-mn)$
$$\begin{cases} m(1-n)=0 \\ m-n+1=0 \end{cases} \quad n=1, m=0.$$

$$\textcircled{7} \quad 2x^2 - 3x + k = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + k - \frac{9}{8},$$

$$k - \frac{9}{8} = 7, \quad k = \frac{65}{8}.$$

$$\textcircled{8} \quad x_1 + x_2 = k^2 - 11.$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5k, \quad k > 0.$$

$$k^2 - 11 = 10k.$$

$$k^2 - 10k - 11 = 0$$

$$k = 11, \quad k = -1.$$

$$\textcircled{9} \quad \text{ბ) } a + \frac{b^2}{a-b} + b = \frac{a^2 - ab + b^2 + ab - b^2}{a-b} = \frac{a^2}{a-b}.$$

$$\text{პასუხი: } k = 11.$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{3k^4 - 2k^2 + k - 3}{k+1} = \frac{3k^4 + 3k^3 - 3k^3 - 3k^2 + k^2 + k - 3}{k+1} = 3k^3 - 3k^2 + k - \frac{3}{k+1}; \quad k = 2.$$

V თავის დამატებითი ამოცანები

მოითხოვები V თავის დამატებითი ამოცანების ამოსახსნელად

$$\textcircled{1} \quad P = 4x + 3y.$$

$\textcircled{2} \quad y^2 = 35 - x, \quad x = 35 - y^2, \quad y^2 < 35$ და $y \in \mathbb{N}$, მაშასადამე, $y = 1, y = 2, y = 3, y = 4$ ან $y = 5$. შესაბამისად, $x = 34, x = 31, x = 26, x = 19$ ან $x = 10$.

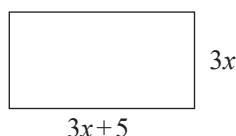
$$\textcircled{3} \quad \text{ა) } S = (x+2, 4) \cdot 3, \quad \text{ბ) } S = (x-2, 4) \cdot 3.$$

$$\textcircled{4} \quad S = 5(x+y); \quad t = \frac{5(x+y)}{9-x}.$$

$$\textcircled{5} \quad \text{ა) } P = 2(6x+5) = 12x+10;$$

$$S = 3x(3x+5) = 9x^2 + 15x.$$

$$\text{ბ) } 58 \text{ სმ; } 204 \text{ სმ}^2.$$



$$\textcircled{6} \quad \text{ა) } x \neq 2, \quad x \neq 3; \quad \text{ბ) } x \text{ ნებისმიერი};$$

$$\text{გ) } x \neq 1, \quad x \neq -1; \quad \text{დ) } x \neq 0, \quad x \neq -2.$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{x^2 - 2x}{x^2} = \frac{x-2}{x} \quad \text{— იგივეობაა, როცა } x \neq 0.$$

$$1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} \quad \text{— იგივეობაა, როცა } x \neq 0.$$

$$\textcircled{9} \quad \text{ა) } x^3 - 2x^2y + xy^2 - 2y^3 = x(x^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(x - 2y);$$

$$\text{ბ) } x^3 - (x+2y)^3 + 8y^3 = (x-x-2y)(x^2 + x^2 + 2xy + x^2 + 4xy + 4y^2) + 8y^3 = -2y(3x^2 + 6xy + 4y^2) + 8y^3 =$$

$$= -6x^2y - 12xy^2 = -6xy(x+2y).$$

$$\textcircled{10} \quad x^2 - 5x + 4; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1,$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1).$$

$$\textcircled{11} \quad -\frac{b}{5} = 2,6, \quad b = -13$$

$$2,6^2 - \frac{2c}{5} = 30,76$$

$$\frac{2c}{5} = 6,76 - 30,76, \quad \frac{2c}{5} = -24, \quad c = -60.$$

$$(12) D=0, b^2-4\cdot 4\cdot 8=0, b=2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2} \text{ ან } b=-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2}; -8\sqrt{2}.$$

$$(13) x_1+x_2=0, b=0, abc=0.$$

$$(14) 2\cdot 6,25-12,5+b=0; b=0.$$

$$(15) \begin{cases} x_1=6x_2 \\ x_1\cdot x_2=\frac{8}{3}, 6x_2^2=\frac{8}{3}, x_2^2=\frac{4}{9}; \\ x_2=\frac{2}{3}; & x_2=-\frac{2}{3}; \\ x_1=4; & x_1=-4; \\ \frac{a+2}{3}=\frac{14}{3}, a=12; & \frac{a+2}{3}=-\frac{14}{3}, a=-12. \end{cases}$$

$$(16) \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1; \quad \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=-1; \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{c}{2}}=-1; \quad \frac{1}{c}=-1, c=-1.$$

$$(17) \text{ აქ არ არის ნახსენები კვადრატული განტოლება, ამიტომ, თუ } a=0, \text{ მაშინ } x=\frac{9}{8}. \\ \text{თუ } a\neq 0, \text{ მაშინ } D=0, \text{ აქედან } a=4 \text{ ან } a=16.$$

$$(18) \text{ დ) } \left(\frac{a}{b^2-1}-\frac{a}{b(b-1)}\right)\cdot\frac{b(b+1)}{ab}=\frac{ab-ab-a}{b(b+1)(b-1)}\cdot\frac{b(b+1)}{ab}=\frac{-1}{b(b-1)}=\frac{1}{b(1-b)}.$$

$$(19) \frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2x^2y}{x(x^2-y^2)}=\frac{x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2}+\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2-y^2}=\frac{x+y}{x-y}. \\ \text{თუ } x=2,55 \text{ და } y=-1,45, \text{ მაშინ } \frac{x+y}{x-y}=\frac{1,1}{4}=\frac{11}{40}.$$

$$(20) \left(\frac{b^2}{2a}-2a\right)\cdot\left(\frac{1}{2a+b}-\frac{1}{2a-b}\right)=\frac{b^2-4a^2}{2a}\cdot\frac{2a-b-2a-b}{4a^2-b^2}=\frac{(b^2-4a^2)(-2b)}{-2a(b^2-4b^2)}=\frac{b}{a}=\frac{-51,6}{17,2}=-\frac{516}{172}=-3.$$

$$(21) \frac{3m^2+5m-4}{m+3}=\frac{3m^2+9m-4m-12+8}{m+3}=\frac{3m(m+3)-4m(m+3)+8}{m+3}=3m-4+\frac{8}{m+3}; \\ m+3=\pm 1, m+3=\pm 2, m+3=\pm 4, m+3=\pm 8. \\ \text{პასუხი: } \{-11; -7; -5; -4; -2; -1; 1; 5\}.$$

$$(22) \overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c). \\ \text{იყოფა } 99\text{-ზე.}$$

$$(23) x^8-16=(x^4-4)(x^4+4)=(x^2-2)(x^2+2)(x^4+4x^2+4-4x^2)= \\ =(x^2-2)(x^2+2)((x^2+2)^2-4x^2)=(x^2-2)(x^2+2)(x^2+2+2x)(x^2+2-2x).$$

$$(24) \frac{x+5}{x^2+5x-6}=\frac{(a+b)x+6b-a}{x^2+5x-6} \\ \text{თუ } x=0, 5=6b-a; \\ \text{თუ } x=1, 6=7b. \\ b=\frac{6}{7}; a=\frac{1}{7}.$$

შემაჯავებელი წერა

თემა: ალგებრული გამოსახულება; ცვლადი, რაციონალური და ირაციონალური გამოსახულებები, ერთწევრი, მრავალწევრი, ალგებრული წილადი.

სამიზნე ცნება: ალგებრული გამოსახულება.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს უცნობი სიდიდის წარმოდგენა ცვლადით, ცვლადების გამოყენებით სიდიდეებს შორის კავშირების დამყარება.

ამოცანების ნიმუშები

ამოხსენით ამოცანები

① ჩანერეთ ასოითი გამოსახულების სახით 2-ზე მეტი ნატურალური n რიცხვის წინა და მომდევნო რიცხვების ჯამი.

② მელანოს ხელფასი a ლარი თებერვლიდან $p\%$ -ით გაეზარდა. ჩანერეთ ასოითი გამოსახულების სახით მელანოს ხელფასის საერთო რაოდენობა იანვარსა და თებერვალში.

③ $\frac{x^2+9}{x^2-9} + \frac{x+3}{x}$ გამოსახულებაში მიუთითეთ ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

④ ცვლადის რა მნიშვნელობისთვის არის ნულის ტოლი $\frac{a^2}{a-1} - 4$ გამოსახულების მნიშვნელობა?

⑤ დაშალეთ მამრავლებად მრიცხველიცა და მნიშვნელიც და შეკვეცეთ:

$$\frac{x^3+2x^2+5x+10}{x^3+3x^2+5x+15}.$$

⑥ გივიმ იყიდა ინდაურები და ქათმები. თითო ინდაური 30 ლარად, თითო ქათამი — 12 ლარად, სულ გადაიხადა 108 ლარი. რამდენი ინდაური და რამდენი ქათამი იყიდა გივიმ?

⑦ იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^2-(a+1)x+(2a-5)$ კვადრატული სამწევრის ფესვების ჯამი 5-ით მეტია ფესვების ნამრავლზე.

⑧ იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $ax^2-4x+5=0$ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი.

⑨ იპოვეთ n -ის ყველა მთელი მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $\frac{n^2-4n+5}{n-3}$ ალგებრული წილადის გამოსახულების მნიშვნელობა მთელი რიცხვია.

⑩ შეასრულეთ მოქმედებები:

$$\frac{2x^2-12xy+18y^2}{6x^2y} : \frac{xy-3y^2}{8xy^2}.$$

პასუხები:

① $2n$. ② $a(2+\frac{p}{100})$ ლარი. ③ $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

④ $a=2$. ⑤ $\frac{x+2}{x+3}$. ⑥ 2 ინდაური, 4 ქათამი.

⑦ $a=1$. ⑧ $a=0$; $a=0,8$. ⑨ $n=4$, $n=2$, $n=5$, $n=1$. ⑩ $\frac{8(x-3y)}{3x}$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

① $n-1$ და $n+1$ რიცხვების მინიშნება შეფასდეს 0,5 ქულით, მათი ჯამის ჩანაწერი — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

② a -ს $p\%$ -ის გამოსათვლელი გამოსახულების ჩანერა შეფასდეს 0,5 ქულით; იანვრის და თებერვლის ხელფასების საერთო ოდენობის გამოსათვლელი გამოსახულების ჩანერა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

③ ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის მითითება შეფასდეს 1 ქულით. შეიძლება 0,5 ქულის გამოყენებაც მცირე ხარვეზის შემთხვევაში.

④ გამოსახულების წილადის სახით ჩანერა და მრიცხველის 0-თან გატოლება შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულით შეფასდეს მიღებული კვადრატული განტოლების ამოხსნა.

⑤ მხოლოდ მრიცხველის ან მნიშვნელის მამრავლებად დაშლა შეფასდეს 0,5 ქულით; ორივეს დაშლა და წილადის შეკვეცა — 1 ქულით.

⑥ ამოცანაში ცვლადების შემოტანა და განტოლების შედგენა შეფასდეს 0,5 ქულით; განტოლების ამოხსნა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

მითითება: თუ ინდაურების და ქათმების რაოდენობებს აღვნიშნავთ, შესაბამისად n და m -ით, მივიღებთ განტოლებას: $30n + 12m = 108$. ამ განტოლებას ნატურალურ რიცხვთა ერთადერთი წყვილი აკმაყოფილებს: $n=2$, $m=4$.

⑦ ვიეტის ფორმულების ჩანერა შეფასდეს 0,5 ქულით, კიდევ 0,5 ქულა დაინეროს ამოცანის პირობის განტოლებით მოდელირებაში და ამ განტოლების ამოხსნაში. სულ — 1 ქულა. 0,5 ქულით შეიძლება შეფასდეს ამოხსნის ფრაგმენტი.

⑧ თუ იპოვა მხოლოდ a -ს ის მნიშვნელობა, როცა $D=0$, შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულა დაემატოს, თუ გაითვალისწინა, რომ, როცა $a=0$, განტოლება წრფივია და აქვს ერთი ფესვი. სულ — 1 ქულა.

⑨ 0,5 ქულით შეფასდეს, თუ იპოვა n -ის რამდენიმე მნიშვნელობა სინჯვის მეთოდით, ან წარმოადგინა ალგებრული წილადი ისეთი ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი მრავალწევრია, მეორე — ალგებრული წილადი, რომელიც ცვლადს მრიცხველში არ შეიცავს: $n-1 + \frac{2}{n-3}$. კიდევ 0,5 ქულა დაემატოს, თუ გამოთვლის n -ის ყველა მთელ მნიშვნელობას, როცა 2 იყოფა $(n-3)$ -ზე. სულ — 1 ქულა.

⑩ სწორი პასუხი შეფასდეს 1 ქულით. შეიძლება გამოვიყენოთ 0,5-ქულიანი შეფასება გარდაქმნებისას დაშვებული მცირე უზუსტობის შემთხვევაში.

სასწავლო პროცესში ამ შემაჯამებელი წერის მნიშვნელობა გამორჩეულად მაღალია. წარმოდგენილი მასალა საყურადღებო როლს თამაშობს მოსწავლეთა ცოდნისა და უნარების დახვეწისა და განვითარების, სხვადასხვა ტიპის ამოცანებში მათემატიკური აპარატის გამოყენების მიმართულებით. ამრიგად, მხოლოდ განმსაზღვრელი შეფასებით შემოფარგვლა შეზღუდვად სასწავლო პროცესის პროდუქტიულობას. აქტუალური ხდება **განმავითარებელი შეფასების ჩართვა** და ამ მიზნით განმსაზღვრელი შეფასების გამოყენება განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად. მოსწავლეთა შედეგებში ხარვეზებისა

და მიღწევების შესწავლითა და გაანალიზებით, კლასში ამ საკითხების საჯარო განხილვით, აქცენტების დასმით, მოსწავლეები უთუოდ შეძლებენ წერის შედეგების არსებით გაუმჯობესებას.

გთავაზობთ ზოგიერთ რეკომენდაციას, თუმცა თქვენი მოსწავლეების ნაშრომთა გაცნობის კვალობაზე, თქვენ შეძლებთ ამ რეკომენდაციათა გაფართოებასაც და დაკონკრეტებასაც, რათა შეძლოთ შეფასებათა დონეების მისადაგება სოლო ტაქსონომიის მიხედვით.

① ამოცანის განხილვისას (და არა მხოლოდ ამ შემთხვევაში) გაითვალისწინეთ, რომ საკმაოდ მარტივი საკითხებისადმი მიბრუნება და მათი განხილვა ფუჭ აქტივობად არ ჩაითვლება — მაღალი მზაობის მოსწავლეს განუმტკიცებს ცოდნას, დაბალი მზაობის მოსწავლეს კი მისცემს შესაძლებლობას აღიდგინოს ეს ცოდნა, ან მიიღოს მისთვის ახალი ინფორმაცია. ნატურალური რიცხვის წინა და მომდევნო რიცხვების შესახებ მსჯელობა სრულად მიანდეთ მოსწავლეებს, თქვენ კი აკონტროლეთ ეს პროცესი. აქვე შეიძლება დასვათ კითხვა რაიმე ნატურალური რიცხვის მომდევნო ლუნი (კენტი) ნატურალური რიცხვის შესახებ. ეს უკვე დააფიქრებს მოსწავლეებს და მოცემული რიცხვის ლუნ-კენტოვნებაზე მოუწევთ მსჯელობა.

② ამოცანა, ისევე როგორც ყველა ამოცანა პროცენტების შესახებ, აქტუალურია თავისი გამოყენებების თვალსაზრისით. დაუსვით შეკითხვა მოსწავლეებს a რიცხვის $p\%$ -ით გაზრდის შესახებ და განიხილეთ თანამიმდევრობით სავარაუდო პასუხები. რატომაა მიუღებელი: $a+p$, $a+\frac{p}{100}$? მარტივი მაგალითების განხილვით კლასი მივა სწორ პასუხამდე: $a+a\cdot\frac{p}{100}$. სჯობს, თუ წინასწარ თავად პროცენტის ცნებასაც გაახსენებთ. შეიძლება დასვათ ასეთი კითხვები: რამდენი პროცენტით ზრდას ნიშნავს თანხის 2-ჯერ, 3-ჯერ გაზრდა? ეს კითხვებიც შეიძლება განხილვის ობიექტი გახდეს.

③ ამოცანაც მრავალმხრივი განსჯის საფუძველს გვაძლევს. არაა გამორიცხული, რომ მოცემულ წილადებში დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს არ მიაკუთვნონ ცვლადის ის მნიშვნელობები, რომლებიც წილადს ნულად აქცევენ. მაგალითად, $\frac{x-7}{x-3}$ სახის წილადში ზოგიერთი მოსწავლე დასაშვებ მნიშვნელობად არ მიიჩნევს $x=7$ -ს, ან მოითხოვს, რომ შესრულდეს პირობა: $x-7>0$, ან $\frac{x^2-1}{x(x+1)}$ გამოსახულებაში დასაშვებად არ მიიჩნევს მხოლოდ $x=0$ -ს, რადგან წილადს შეკვეცავს $(x+1)$ -ზე.

④ ამოცანა და სხვა განხილული მარტივი მაგალითები ინტერაქტიული განხილვის კვალობაზე კიდევ უფრო ნათლად წარმოაჩენს დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის ცნების არსს.

④ ამოცანის ამოხსნათა გაცნობისა და იქ აღმოჩენილი ხარვეზების გაანალიზების შემდეგ, ინტერაქტიულად განიხილეთ მისი შინაარსი. არაა გამორიცხული, რომ თვით მე-10 კლასშიც კი ზოგიერთმა მოსწავლემ ვერ შეძლოს მოცემული გამოსახულების წილადის სახით წარმოდგენა. მაღალი მზაობის მოსწავლეები, ალბათ, მიანიშნებენ, რომ ფაქტობრივად გვაქვს ორი წილადის შეკრება, მეორე წილადია $\frac{4}{1}$. შემდეგ კი ვმოქმედებთ წილადების შეკრების წესით. დასვით შეკითხვა: ცვლადის რა მნიშვნელობისთვისაა ეს ალგებრული წილადი ნულის ტოლი? (წილადი ნულის ტოლია ცვლადის იმ მნიშვნელობისთვის, რომლისთვისაც მრიცხველი ნულია, მნიშვნელი კი არ არის ნულის ტოლი). შემდეგ

დგება მრიცხველის ნულთან ტოლობის საკითხი. მოსწავლეთა ჩართულობით მიაკვლიეთ საუკეთესო გზას — მრიცხველში ორწევრის კვადრატია, თუმცა არც ფესვთა ფორმულების, ან ვიეტის თეორემის გამოყენებით ძიებაა დასაძინებელი.

⑤ ამოცანაში, ისევე როგორც ყოველი საინტერესო ამოცანის ამოხსნისას, მნიშვნელოვანია წინმსწრები მეტაკოგნიტური პაუზის გაკეთება და შესაძლო ხერხებისა და მოსალოდნელი შედეგების გააზრება, რათა თავიდან ავიცილოთ არარაციონალური ან არასწორი გზები. დაჯგუფების ხერხი, ორწევრის ნამრავლად გარდაქმნა, შემდეგ კი მრიცხველს ნამრავლად გარდაქმნა — ეს ის გარდაქმნებია, რომლებსაც მოსწავლე უნდა ფლობდეს წილადებთან დაკავშირებით. ბოლო ოპერაციაა თანამამრავლთა შეკვეცა. არ იქნება ურიგო, თუ დავსვამთ შეკითხვას: იქნებ მრიცხველი და მნიშვნელი თავიდანვე შეგვეკვეცა მათში შემავალ (x^2+5x) -ზე? პასუხი უნდა იყოს კატეგორიული: შეკვეცა შეიძლება მხოლოდ წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის საერთო მამრავლზე.

⑥ ამოცანის განხილვაში აქტიურად ჩაერთვება ყველაზე პასიური მოსწავლეც კი. ამოხსნების გაცნობისას არაა გამორიცხული, რომ მხოლოდ პასუხი იყოს მითითებული. მოსწავლეებს შეახსენეთ, რომ, საზოგადოდ, ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს მისი ყველა ამონახსნის პოვნას, ან იმის ჩვენებას, რომ ამონახსნი არ არსებობს. ამრიგად, თუ მხოლოდ პასუხია მითითებული და არაა ნაჩვენები რომ სხვა ამონახსნი არ არსებობს, ეს სრულფასოვან ამონახსნად არ ჩაითვლება. ნახალისეთ ის მოსწავლეები, რომლებიც შეეცდებიან სათანადო მათემატიკური მოდელის — ორუცნობიანი განტოლების შედგენას და მისი ნატურალური ამონახსნების ძიებას.

⑦ ამოცანა მაღალი მზაობის მოსწავლეებისთვის კარგი შესაძლებლობაა ცოდნისა და უნარების გამოსამჟღავნებლად. ვიეტის თეორემის გამოყენებით, ისინი იოლად მიიღებენ მარტივ ერთუცნობიან განტოლებას a -ს მიმართ და იპოვიან კიდევ მას. თუმცა, ალბათ, მოსწავლეთა ნაშრომებში აღმოაჩენთ ისეთებსაც, რომლებშიც ფესვების ფორმულების გამოყენებით მიმართავენ მათი ჯამისა და ნამრავლის ძიებისას შრომატევად გარდაქმნებს. ეს შესანიშნავი მაგალითია იმის სადემონსტრაციოდ, რომ რაც უფრო ღრმად მასალის ცოდნა, მით ნაკლები ძალისხმევით მიიღწევა სასურველი შედეგი.

⑧ ამოცანაშიც, სათანადო თეორიის არცოდნის შემთხვევაში, სირთულეებს გადაწყდება მოსწავლე. მიმართეთ კლასს და უთუოდ მოისმენთ დისკრიმინანტზე მითითებას. კვადრატულ განტოლებაში ერთადერთი ფესვის არსებობა დისკრიმინანტის ნულთან ტოლობისას მიიღწევა (ამ შემთხვევაში სრულიად უადგილოა ორ ტოლ ფესვზე საუბარი). ერთი ფესვი ექნება მოცემულ განტოლებას მაშინაც, როცა $a=0$ — მიიღება წრფივი განტოლება. შეიძლება დასვას საინტერესო შეკითხვა: a -ს რა მნიშვნელობისთვის ექნება მოცემულ განტოლებას ერთი ფესვი მაინც? ისაუბრეთ ამ ტერმინზე: „ერთი მაინც“ და დასმული ამოცანის ამოხსნის გზაზე. განხილვას უფრო შთამბეჭდავს გახდის და გააძლიერებდა საკითხის აღქმის გეომეტრიული წარმოდგენების ჩართვა.

⑨ ამოცანის ამოხსნისას კვლავ აქტუალურია მეტაკოგნიტური პაუზა. ამოცანა არატრივიალურია და არაა გამორიცხული მოსწავლეებმა სინჯვის გზით იპოვონ n -ის რამდენიმე მნიშვნელობა. კვლავ აღნიშნეთ, რომ ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს მისი ყველა ამონახსნის პოვნას. ის მოსწავლე, რომელიც ყურადღებითაა ჩართული სასწავლო პროცესში, განხილული ამოცანების მსგავსად, შეეცდება მნიშვნელის ჯერადი შესაკრებების გამოყოფას მრიცხველში. მაგალითად, $(n-3)$ -ზე გაიყოფა $n^2-3n=n(n-3)$, ამას კი მოსდევს $(-4n)$ -ის დაშლა: $-3n-n$. შემდეგ კი ანალოგიურად გაგრძელება გარდაქმნები: $n^2-4n+5=n^2-3n-n+3+2=n(n-3)-(n-3)+2$. შედეგად, წილადიდან გამოიყოფა მრავალწევრი და დარჩება

უმარტივესი წილადი: $n-1+\frac{2}{n-3}$; მიმართეთ მოსწავლეებს n -ის რა მნიშვნელობებია დასაძგენი? $n-3=-2$; $n-3=-1$; $n-3=1$; $n-3=2$. მათგან კი იოლად მოიძებნება n -ის ყველა მოთხოვნილი მნიშვნელობა. ამ ხერხის ცოდნის გასამყარებლად შეიძლება დაასახელოთ $\frac{n^2-2n+4}{n+1}$ წილადისთვის იგივე ამოცანა, ან კიდევ უფრო გაართულოთ ამოცანა $\frac{2n^3-n+7}{n+4}$ -ის შემთხვევაში.

10 ამოცანის ამოხსნების შემოწმებისას შესაძლებელია აღმოაჩინოთ შემდგომი განხილვისთვის — განმავითარებელი შეფასებისთვის აქტუალური საკითხები. კერძოდ, ალგებრული წილადების გაყოფის ოპერაციის შესრულების წესის დარღვევის, შესაკრებთა შეკვეცის დაუშვებლობის, ან მრავალწევრის ნამრავლად დაშლისა და ხარისხების შეკვეცის საკითხებში. ყველა ეს საკითხი საჯარო განხილვის გზით, ინტერაქტიული ფორმით უნდა განიხილოს. ცოდნის გასაღრმავებლად კი შეიძლება ანალოგიური ამოცანები განიხილოს დამატებითი ამოცანებიდან.

განმავითარებელი შეფასების დასასრულს მოისმინეთ მოსწავლეთა კომენტარები აღნიშნული შემაჯამებელი წერის შესახებ, ჩაინიშნეთ ის სირთულეები, რაც ახლდა წერას და დარჩა განმავითარებელი შეფასების შემდგომაც, შეიტანეთ კორექტივები სწავლა-სწავლებასთან დაკავშირებით დაგეგმილ აქტივობებში.

მე-5 თავის შემაჯამებელი წერისა და განმავითარებელი შეფასების შემდეგ თქვენ შეძლებთ დააკონკრეტოთ სოლო ტაქსონომიის ზოგადი ფორმით წარმოდგენილი მოსწავლეთა მიღწევების დონეები.

პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს არამკაფიო წარმოდგენა აქვს განხილულ თემასთან დაკავშირებულ ცნებებზე. უჭირს მოქმედებები წილადებზე, პროცენტის ცნების შინაარსი არ აქვს გააზრებული. ვერ წვდება ტექსტური ამოცანის შინაარსს.

უნიტრუქტურული დონე. ახერხებს მარტივი წილადების შეკრებას, თუმცა გაყოფის, შეკვეცის ოპერაციების შესრულებისას უშვებს შეცდომებს. პროცენტის ცნება იცის, თუმცა ვერ იყენებს მას, კვადრატული სამწევრის ფესვის ცნება იცის, მაგრამ სამწევრთან დაკავშირებულ საკითხებს ვერ წყვეტს. ტექსტური ამოცანის შინაარსი გაიაზრა, მაგრამ ვერ დგამს ნაბიჯებს მის ამოსახსნელად.

მულტისტრუქტურული დონე. ყველა საკითხის განხილვის ცდა აქვს, მაგრამ იმდენად ფრაგმენტულია მისი ცოდნა, რომ მხოლოდ მარტივი ამოცანების გადაჭრას ახერხებს. პროცენტის ცნება იცის და აქვს ცდა სათანადო ამოცანის ამოხსნის. უჭირს მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა, მაგრამ ავლენს წილადების შეკვეცის ცოდნას. ახერხებს ტექსტურ ამოცანაში სინჯვის მეთოდით პასუხის გამოცხადებას, თუმცა უჭირს მისი ერთადერთობის ჩვენება. იცის ვიეტის თეორემა, მაგრამ ყოველთვის ვერ ახერხებს მის ჩართვას ამოცანის ამოხსნაში.

მიმართებითი დონე. მოსწავლე ხსნის დასმულ ამოცანებს. პასუხობს დამაჯერებლად, კარგად იცნობს თეორიულ საკითხებს და ახერხებს მათ ჩართვას პრაქტიკული ამოცანების განხილვისას, რომლებიც ანალოგიურია უკვე განხილულის, თუმცა შეიძლება შეექმნას პრობლემა ახლებურად დასმული, ან განზოგადებული ამოცანის ამოხსნისას.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლემ წარმატებით დაძლია შემაჯამებელი წერის ყველა სირთულე, მათი საჯარო განხილვისას ახერხებს მკაფიოდ ჩამოაყალიბოს ამოხსნის გეგმა, თავად წამოაყენოს ამ ამოცანათა განზოგადების გზები და გადაჭრას მიღებული ამოცანები, გამოიყენოს ამოხსნის სხვადასხვა მიდგომა და შეძლოს მათი შედარება.

VI თავი

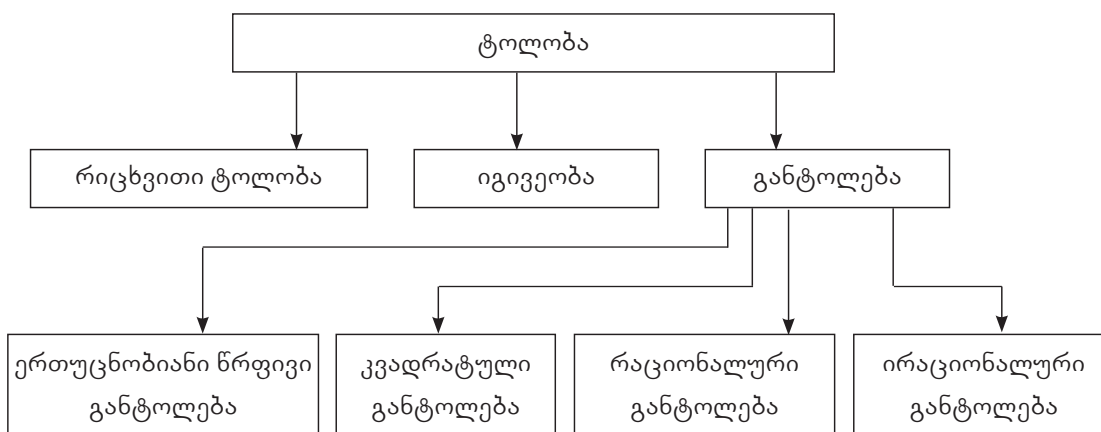
განტოლება. უტოლობა

თემა: ალგებრული გამოსახულება. განტოლება. უტოლობა საათების სავარაუდო რაოდენობა: 13 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება; კვადრატული განტოლება; რაციონალური განტოლება; ირაციონალური განტოლება; წრფივი უტოლობა; წრფივ უტოლობათა სისტემები			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
განტოლება, იგივეობა, უტოლობა, უტოლობათა სისტემა. რიცხვები შეიძლება სხვადასხვა სახით ჩაიწეროს; რიცხვითი ტოლობა რიცხვების სხვადასხვა ჩანაწერების ტოლობაა; იგივეობა ცვლადის შემცველი ტოლობაა, რომელიც ჭეშმარიტია ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეზე. ერთუცნობიანი განტოლების მოცემა ნიშნავს ცვლადის შემცველი ტოლობის მოცემას და ამოცანის დასმას: ცვლადის რა მნიშვნელობისთვის მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობა? წრფივ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს უამრავი ამონახსნი, შეიძლება ჰქონდეს ერთი ამონახსნი; წრფივ ერთუცნობიან განტოლებას შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსნი. განტოლების ამოხსნისას უნდა მოიძებნოს მისი ყველა ამონახსნი ან დამტკიცდეს, რომ მას არ აქვს ამონახსნი.	ტოლობა; იგივეობა; განტოლება; განტოლების სახეები: წრფივი, კვადრატული, რაციონალური, ირაციონალური.	რა განსხვავებაა რიცხვით ტოლობასა და განტოლებას შორის? რა არის იგივეობა? რას ეწოდება წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება? რამდენი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს კვადრატულ განტოლებას? რატომ არის აუცილებელი ირაციონალური განტოლების შემთხვევაში მიღებული ფესვების შემოწმება?	განტოლებისა და უტოლობის გამოყენება

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, მოცემული პირობის გათვალისწინებით, აღგებრულ გამოსახულებებს შორის კავშირის დამყარება; ამ კავშირის წარმოდგენა განტოლების ან უტოლობის საშუალებით და პრობლემის გადაჭრა.

მე-6 თავის ძირითადი სამიზნე ცნებებია განტოლება (წრფივი, კვადრატული, ირაციონალური, რაციონალური), ერთუცნობიანი უტოლობა და სისტემები. მასალა აღნიშნულ სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული საკითხების გამეორება და ცოდნის გაღრმავებაა; მოსწავლე პირველად ხვდება ტოლობის, განტოლების, იგივეობისა და უტოლობის შესახებ სისტემაში მოყვანილ მასალას; შეუძლია შეადაროს და ერთმანეთთან მიმართებაში განიხილოს ყველა ეს ცნება. მოსწავლე პოულობს პასუხს კითხვებზე: რა არის იგივეობა? რა არის ტოლობა? რა არის განტოლება? რა არის ერთუცნობიანი უტოლობა? რა პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება განტოლების, უტოლობის ამოხსნაზე?

VI თავში წარმოდგენილი საკითხები შეიძლება შემდეგი სქემით წარმოვადგინოთ:



6.1. ტოლობა, განტოლება. წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება

გავითვალისწინოთ, მოსწავლეებთან საუბარი ისე დაგვეგეგმოთ და წარვმართოთ, რომ მათ კარგად გაიაზრონ მნიშვნელოვანი ცნებები: ტოლობა, იგივეობა, განტოლება. ამ სამიზნე ცნებების შესახებ მასალას შესაბამისი მაგალითები ახლავს. მოსწავლეებს ვთხოვთ, დაასახელონ ანალოგიური მაგალითები: რიცხვების სხვადასხვა ჩანაწერებით წარმოდგენის, ტოლობის ნიშნის გამოყენების; რიცხვებზე შეკრების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებების თვისებების აღწერის, იგივეობებისა და განტოლებების, მათ შორის განსხვავების აღმოჩენასა და გააზრებას ახლავს ცნებების სწორი აღწერა: ორ რიცხვით გამოსახულებას შორის ტოლობის დანერით წარმოვადგენთ რიცხვით ტოლობას, რომელიც შეიძლება მცდარი გამონათქვამი იყოს, თუ ტოლობის ორივე მხრით ერთი და იგივე რიცხვი არ არის წარმოდგენილი. იგივეობა არის ცვლადის შემცველი ტოლობა, რომელიც ჭეშმარიტია ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეზე. მოსწავლეები გაიხსენებენ, რომ მე-7 კლასში ისინი განიხილავდნენ იგივეობებს, რომლებიც ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვისაა ჭეშმარიტი. შემდეგ შემოდის ალგებრული წილადები და განვიხილავთ იგივეობებს, რომლებიც ჭეშმარიტია ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებისთვის; მოსწავლე შეძლებს შესაბამისი მაგალითის მოყვანას, მაგალითად;

$$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$$

ტოლობა იგივეობაა 2-ისგან განსხვავებული რიცხვების სიმრავლეზე.

მოსწავლეები ადრე არაერთხელ განიხილავდნენ ერთუცნობიან განტოლებას და უნდა იცნობდნენ წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ცნებას; ცნობარითაც შევახსენებთ მათ $ax=b$ სახის წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნის ყველა შემთხვევას. ამასთანავე, ყურადღებას გავამახვილებთ იმაზე, რომ განტოლების მოცემა ნიშნავს ამოცანის დასმასაც — ვიპოვოთ ტოლობაში შემავალი ცვლადის ყველა მნიშვნელობა, რომლებისთვისაც ტოლობა ჭეშმარიტია („ამოხსნათ განტოლება“).

ძალიან მნიშვნელოვანია ცვლადების გამოყენებით ტოლობის თვისებების წარმოდგენა. ამ თვისებების გამოყენებით მიმდინარეობს განტოლებების ამოხსნის მაგალითების განხილვა. მასწავლებელი ინტერაქტიული ფორმით განიხილავს მაგალითებს (1-5). მოსწავლემ უნდა შეძლოს რიცხვებზე მოქმედებების შესაბამისი თვისების დასახელებაც (ყოველი გარდაქმნის შესრულებისას). მოსწავლე ეჩვევა მსჯელობას და მოქმედებების გააზრებულად ჩატარებას. მე-5 მაგალითში წარმოდგენილია განტოლების შედგენის ნიმუში — ვერბალურად წარმოდგენილი წინადადების ცვლადის შემცველი ტოლობის სახით ჩაწერის. მიღებული განტოლების ამოხსნა პროპორციის ძირითადი თვისების გამოყენებას მოითხოვს.

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების მოძიებით, მოსწავლეები კიდევ ერთხელ აღწერენ რიცხვითი ტოლობის, იგივეობის, განტოლების ცნებებს; წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ჩაწერის სახეს და ამოხსნის შემთხვევებს.

წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნის შემთხვევების ცოდნას ისინი ადასტურებენ კლასში ამოსახსნელ „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევითაც.

(4)-(7) განტოლებების ამოხსნა შეიძლება კლასში დამოუკიდებელი მუშაობის სახით ჩაატაროთ. მოსწავლეები წარმოგვიდგენენ საკუთარ ამოხსნებს და პასუხობენ ჩვენს შეკითხვებს იმ თვისებების შესახებ, რომლებიც განტოლების გარდაქმნისას გამოიყენეს.

(11)-(19) ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლემ უნდა შეძლოს უცნობი სიდიდის აღნიშვნა და, ამოცანის პირობის ჩაწერა.

წინასწარ, **(8)-(10)** ამოცანებით, ვიმეორებთ ცვლადის შემოტანის წესს, ცვლადებს შორის კავშირების გამოსახვის წესებს.

8 პირველ სემესტრში ეს საკითხი დაწვრილებით განიხილებოდა; ცნობარშიც წარმოდგენილია შესაბამისი მასალა. გამეორება გაუმყარებს მოსწავლეებს ამ ცოდნას.

$$s=p(1+rn); \quad 1+rn=\frac{s}{p}; \quad rn=\frac{s}{p}-1; \quad r=\frac{s-p}{pn}.$$

9 ა) $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=2.$ ბ) $4t=(2-t)6; \quad t=\frac{6}{5}; \quad 4t=4,8;$
 $s=4,8 \text{ კმ.}$

10 ეს ამოცანა წინა ამოცანის ანალოგიურად იხსნება.

11 კანფეტები — x (კგ)

$$\frac{x}{2}:0,5+\frac{x}{2}:0,3=16$$

$$x+\frac{10x}{6}=16$$

$$x=6 \text{ (კგ).}$$

12 ბურთის საწყისი ფასი — x ლარი:

$$x+\frac{x}{5}=\frac{6x}{5}$$

$$\frac{6x}{5}-\frac{6x}{5}\cdot 0,15=\frac{6x}{5}\cdot 0,85; \quad \frac{6x}{5}\cdot 0,85=102;$$

$$x=100.$$

13 I — x სთ იმუშავა,

II — $(x-4)$ სთ.

I 1 სთ-ში — $\frac{1}{18}$ ნაწ.,

II 1 სთ-ში — $\frac{1}{24}$ ნაწ.

$$\frac{x}{18}+\frac{x-4}{24}=1; \quad 4x+3x-12=72; \quad 7x=84;$$

$$x=12 \text{ (სთ).}$$

14 შენადნობებზე, ხსნარებზე ამოცანების ამოხსნის ხერხების დაუფლება მნიშვნელოვანია. ანალოგიური ამოცანები ხშირად გვხვდება მოსწავლეთა მათემატიკური უნარების შეფასების სხვადასხვა ღონისძიებაზე.

I შენადნობი: ვერცხლი — შენადნობის $\frac{2}{5}$; ოქრო — $\frac{3}{5}$.

II შენადნობი: ვერცხლი — $\frac{3}{10}$; ოქრო — $\frac{7}{10}$.

ახალი შენადნობი: ვერცხლი $\frac{5}{16}$ ნაწილი.

I ავიღოთ x კგ, მეორე — $8-x$ კგ.

ახალ შენადნობში ვერცხლი: $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=8\cdot\frac{5}{16}$.

$$\frac{4}{10}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{2},$$

$$4x+24-3x=25,$$

$$x=1, \quad 8-x=7.$$

15) უნდა დაემზადებინათ:

$$I - x, \quad II - 144 - x.$$

დაამზადეს:

$$I - 1,15x, \quad II - (144 - x) \cdot 1,25.$$

$$1,15x + (144 - x)1,25 = 172; \quad 115x + 125(144 - x) = 17200;$$

$$18000 - 10x = 17200; \quad 800 = 10x.$$

$$x = 80; \quad 144 - x = 64.$$

$$I - 80 \cdot 1,15 = 92; \quad II - 64 \cdot 1,25 = 80.$$

16) $(2 - c) - 1 = 4 - 5c, \quad 4c = 3, \quad c = \frac{3}{4}, \quad c = 0,75.$

17) $(b - 2)(b + 2)x = b + 2$

$$\text{ა) } \begin{cases} (b - 2)(b + 2) = 0 \\ b + 2 = 0, \end{cases} \quad b = -2$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} (b - 2)(b + 2) = 0 \\ b + 2 \neq 0, \end{cases} \quad b = 2$$

$$\text{გ) } (b - 2)(b + 2) \neq 0, \quad b \neq 2 \text{ და } b \neq -2.$$

18) $II - x$ გრამი, $I - (x + 300)$ გრამი.

$$0,21(x + 300) + 0,05x = 0,178(2x + 300);$$

$$0,356x - 0,26x = 0,21 \cdot 300 - 300 \cdot 0,178;$$

$$0,096x = 300 \cdot 0,032;$$

$$x = 100$$

$$\text{ნარევის მასაა } 100 + 400 = 500 \text{ (გ).}$$

19*) მოსწავლე არ უნდა „შეუშინდეს“ ერთზე მეტი ცვლადის შემოტანას: V_1 — 20%-იანი ძმარმუყავს მოცულობა, V_2 — 14%-იანის. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, ვწერთ ცვლადების შემცველ ტოლობას:

$$0,2V_1 + 0,14V_2 = 0,18(V_1 + V_2);$$

$$\text{აქედან, მივიღებთ: } 0,02V_1 = 0,04V_2,$$

$$\text{მაშასადამე, } \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

ანალოგიურია საშინაო დავალების  ამოცანა. აქ, ამოცანის პირობის თანახმად, გვექნება:

$$0,05V_1 + 0,1V_2 = 0,07(V_1 + V_2);$$

$$0,02V_1 = 0,03V_2;$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = 1,5.$$

საშინაო დავალების სხვა ამოცანებიც კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. ამიტომ, საშინაო დავალების შესრულებით, ისინი დაადასტურებენ და გაიმყარებენ ცოდნას ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნის შემთხვევების შესახებ, ვერბალურად მოწოდებული წინადადების ცვლადებით ჩანერგისა და ხსნარებსა და შენადნობებზე ამოცანების ამოხსნის

შესახებ. არის განსხვავებული ამოცანებიც — მაგალითად, **11** ამოცანის ამოხსნისას, საჭიროა პროპორციის თვისების გამოყენება. გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად:

14

დღეების რაოდენობა — x ;
ამოცანის პირობის თანახმად,
 $(185-15x)1,5=237-18x$,
აქედან, $x=9$ (დღე)

15

1 საათში, გუშინ — x დეტალს; დღეს — $(x+4)$ დეტალს.
ამოცანის პირობის თანახმად,
 $1,2 \cdot 7x = 6(x+4)$; $8,4x - 6x = 24$; $2,4x = 24$;
 $x=10$ (დეტალი), $x+4=14$ (დეტალი).

16

სპილენის კუბის მოცულობა — $2V$
რკინის სოლის მოცულობა — V
რკინის სოლის მასა — $V \cdot 7,8$
სპილენძის კუბის მასა — $2V \cdot 8,9$.

$$7,8V + 17,8V = 1280; \quad 25,6V = 1280;$$

$$V = 50 \text{ (სმ}^3\text{)};$$

$$2V = 100 \text{ (სმ}^3\text{)}.$$

17

თანხა — x , დარჩა — $x - 0,25x = 0,75x = \frac{3}{4}x$.
შემდეგ გამოიტანა: $\frac{3}{4} \cdot x \cdot \frac{3}{5} + 2000 = \frac{9}{20}x + 20000$.
დარჩა: $0,75x - 0,45x - 2000 = 0,3x - 2000$.
პირობის თანახმად,
 $0,3x - 2000 = 0,2x$; $0,1x = 2000$;
 $x = 20\,000$ (ლარი).

18

ნავარაუდევო რაოდენობა: I — x , II — $250-x$.
დაამზადეს: I — $0,8x$, II — $(250-x) \cdot 1,2$.
სულ: $0,8x + (250-x) \cdot 1,2 = 260$
 $300 - 260 = 0,4x$
 $x = 100$,
 $250 - x = 150$.
დაამზადეს: $0,8 \cdot 100 = 80$; $150 \cdot 1,2 = 180$.

19

შეურიეს: x ლიტრი და $(5-x)$ ლიტრი.
პირობის თანახმად, $x \cdot 0,025 + 0,06(5-x) = 5 \cdot 0,0495$,
 $0,035x = 0,3 - 0,2475$,
 $x = 1,5$.

6.2. კვადრატული განტოლება. რაციონალური განტოლება

წინარე ცოდნის გააქტიურება დაკავშირებულია სამიზნე ცნებებთან: ტოლობა, განტოლება, წრფივი განტოლება, ალგებრული გამოსახულება (რაციონალური გამოსახულება, მთელი გამოსახულება). მოსწავლეები იხსენებენ მთელი გამოსახულებების სახეებს: პირველი და მეორე ხარისხის მრავალწევრებს. უნდა მივაქციოთ ყურადღება: პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი მრავალწევრი ჩაინერება ასე: $ax+b$, ($a \neq 0$). მას ყოველთვის აქვს ნული $x = -\frac{b}{a}$.

x -ის მიმართ მეორე ხარისხის მრავალწევრი ასე ჩაინერება:

$$ax^2+bx+c, a \neq 0.$$

მოსწავლეები, შესაძლებელია, ჩვენი დახმარებით, იხსენებენ კვადრატული განტოლების ამოხსნის შემთხვევებს; იხსენებენ x -ის მიმართ მეორე ხარისხის მრავალწევრის (კვადრატული სამწევრის) წრფივ მამრავლებად წარმოდგენის (როცა, ეს შესაძლებელია) წესს. ერთობლივი ძალისხმევით განვიხილავთ ფესვების პოვნის სხვადასხვა წესს (ზეპირად, ფორმულებით).

შემდეგ გადავდივართ წილადური განტოლების განხილვაზე, რომლის ამოხსნა დაიყვანება კვადრატული განტოლების ამოხსნაზე. მაგალითით წარმოვადგენთ იმ შემთხვევას, როცა განტოლების გარდაქმნის შედეგად მიღებული კვადრატული განტოლება არ არის მოცემულის ტოლფასი. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ, ახსნან ეს შემთხვევა (გვინევს განტოლების გამრავლება ცვლადის შემცველ გამოსახულებაზე, რაც ტოლფასი გარდაქმნა არ არის).

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემით, მოსწავლეები ადასტურებენ საკუთარ ცოდნას რაციონალური, მთელი, კერძოდ, კვადრატული განტოლების ცნებების შესახებ. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ, აღწერონ წილადური განტოლების ამოხსნის პროცესი. „ტესტური“ დავალებების შესრულებით, კერძო მაგალითებზე დაყრდნობით, მოსწავლეებმა უნდა გამოამჟღავნონ ცოდნა კვადრატული განტოლების ამოხსნის შესახებ. მნიშვნელოვანია **8** „ტესტი“. მოსალოდნელია, აქ მოსწავლემ ზეპირად მიაგნოს მრიცხველის ფესვებს (ვიეტის ფორმულებით, $3+4=7$, $3 \cdot 4=12$). ამ ორი რიცხვიდან განტოლების ფესვი არის მხოლოდ 4.

10 ამოცანა **8** „ტესტის“ გართულებული ვარიანტია. მრიცხველი კვადრატული სამწევრია, მისი ფესვებია 4 და (-1). განტოლებას ერთი ფესვი აქვს, როცა $k=-4$, ან $k=1$.

11 განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ: $\frac{(x+2)(x+1)}{(x+5)(x+1)} = \frac{x+m}{x+n}$.

ეს ტოლობა იგივეობაა (როცა $x \neq -5$ და $x \neq -1$) იმ შემთხვევაში, როცა: $m=2$ და $n=5$, $m+n=7$.

12 კვადრატულ განტოლებას არ აქვს ფესვი, როცა $D < 0$; აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი, როცა $D = 0$ და აქვს ორი ფესვი, როცა $D > 0$. $D = 9 - 8q$, მაშასადამე, გვაქვს:

ა) $q > \frac{9}{8}$; ბ) $q = \frac{9}{8}$; გ) $q < \frac{9}{8}$.

ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს **13** და **14** წილადური განტოლებების ამოხსნა; თითოეული მათგანი კვადრატულ განტოლებაზე დაიყვანება. ამასთანავე,

- 14) ბ) შემთხვევაში, განტოლებას ფესვი არ აქვს.
პროპორციის თვისების გამოყენებით: $x^2+5x+6=-x^2+5x-6$, $2x^2+12=0$.

- 15) შეიძლება გამოვიყენოთ ვიეტის თეორემა:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{3}{m} \\ x_1+x_2=-\frac{6}{2} \\ x_1x_2=-\frac{4}{m} \\ x_1x_2=-\frac{n}{2}; \end{cases} \quad \text{აქედან გვაქვს: } m=1, \frac{n}{2}=4, n=8.$$

- 16) $S=24$. მართკუთხედის გვერდებია a და $\frac{24}{a}$.
 $a-1=\frac{24}{a} \cdot 1,25$;
 $a^2-a=30$; $a^2-a-30=0$.
 $a=6$; $\frac{24}{a}=4$.
 $P=2 \cdot (6+4)=20$ (სმ).

- 17) ფეხით მოსიარულის სიჩქარე — x კმ/სთ.
ველოსიპედისტის — $(x+6)$ კმ/სთ
 $\frac{8}{x} = \frac{20}{x+6}$;
 $8x+48=20x$, $12x=48$,
 $x=4$, $x+6=10$ (კმ/სთ).

- 18) $\frac{x+4}{x} = \frac{x}{x-2}$,
 $x^2+2x-8=x^2$, $2x=8$
 $x=4$.

- 19) $x^2+(q-5)x+q=0$
 $\begin{cases} x_1+x_2=-(q-5) \\ x_1x_2=q \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= (q-5)^2-2q \\ q^2-10q+25-2q &= 25, \quad q^2-12q=0, \quad q=0, \quad q=12. \end{aligned} \right.$

- 20) გემის სიჩქარე მდგარ წყალში — x კმ/სთ.
 $\frac{80}{x+2} + \frac{80}{x-2} = 9$
 $80(x-2)+80(x+2)=9(x^2-4)$,
 $9x^2-160x-36=0$,
 $x=18$ (კმ/სთ).

- 21) ცხადია, $S=\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 - \frac{1}{2}(24-x)(7-x)=15,5x-0,5x^2$.
 $-0,5x^2+15,5x=29$; $x^2-31x-58=0$;
 $x=2$.

საშუალო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების მიზნების გათვალისწინებით, ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს კვადრატული და წილადური განტოლებების ამოხსნასთან დაკავშირებული საშინაო დავალების შესრულება. მოსწავლემ უნდა შეძლოს კვადრატული განტოლების გამოკვლევის ჩატარება და მარტივი განტოლებების ამოხსნა. წარმოდგენილი

ამოცანები ამოიხსნება წილადური და კვადრატული განტოლებების შედგენის გამოყენებით. კლასში ამოხსნილი ამოცანებისგან განსხვავებულად შეიძლება ჩაითვალოს რამდენიმე ამოცანა.

17 შეგირდი დღეში ამზადებს — x დეტალს, ოსტატი — $(x+84)$ დეტალს.

25 დეტალის დამზადებას ოსტატი მოანდომებს $\frac{25}{x+84}$ დღეს, შეგირდი 4 დეტალს დაამზადებს $\frac{4}{x}$ დღეში.

ამოცანის პირობით თანახმად,

$$\frac{25}{x+84} = \frac{4}{x},$$

$$25x = 4x + 84 \cdot 4; \quad 21x = 84 \cdot 4;$$

$$x = 16.$$

3 დღეში — 48 (დეტალი).

19 თუ მონაწილეთა რაოდენობას აღვნიშნავთ x -ით, მაშინ გათამაშებული პარტიების რაოდენობა იქნება: $\frac{x(x-1)}{2}$.

$$\text{პირობის თანახმად, } \frac{x(x-1)}{2} = 66; \quad x(x-1) = 132,$$

$$\text{ზეპირადაც ვიპოვიტ: } x = 12, \quad x-1 = 11.$$

$$\text{20 დ) } \begin{cases} 10x^2 - 2x = 0 \\ 5x^3 + 9x^2 - 2x \neq 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2x(5x-1) = 0 \\ x(5x^2 + 9x - 2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, & x = \frac{1}{5} \\ x \neq 0, & x \neq \frac{1}{5}, & x \neq -2. \end{cases}$$

განტოლებას არ აქვს ამონახსნი.

შეიძლება გვეპოვა $10x^2 - 2x = 0$ განტოლების ამონახსნები: $x = 0$ და $x = \frac{1}{5}$ და მათთვის $5x^3 + 9x^2 - 2x \neq 0$ პირობის შემოწმებით დაგვედგინა, რომ $x = 0$ და $x = \frac{1}{5}$ გარეშე ფესვებია. მაშასადამე, განტოლებას არ აქვს ამონახსნი.

21 მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამ პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა, ფართობის თვისებების ცოდნა დაეხმარება მას S ფართობის ფორმულის მიღებაში: ოთხი სპორტული მოედნის ფართობების შეკრებაა საჭირო. თუმცა, შეიძლება მოსწავლემ პირდაპირ ოთხივე მოედნის ფართობების ჯამი წარმოადგინოს:

$$S = (4x-1) \cdot (x-2) = 4x^2 - 9x + 2.$$

მიიღება კვადრატული განტოლება

$$4x^2 - 9x + 2 = 1422.$$

ამოცანის ამონახსნია $x = 20$ (მ).

6.3. ირაციონალური განტოლება

წინარე ცოდნის გააქტიურება განტოლების, განტოლებათა ტოლფასობის, კვადრატული განტოლების, ფესვისა და მოდულის თვისებების გამეორებას გულისხმობს. განტოლებათა ტიპები, რომლებიც პარაგრაფში განიხილება, მოსწავლეთათვის ახალი მასალაა. მისი შესწავლა დაკავშირებულია ტოლფასობის ცნების კარგ გააზრებასთან.

მოსწავლეები, ჩვენ მიერ დასმულ კითხვებზე პასუხების მოძიების პროცესში, იხსენებენ, რომ არითმეტიკული ფესვი არაუარყოფითი რიცხვიდან არაუარყოფითი რიცხვია.

მოსწავლეები, თქვენი ინტერაქტიული ჩართულობით, განიხილავენ ირაციონალური განტოლების ამოხსნის ნიმუშებს (მაგალითები: 1; 2; 3; 4). წარმოდგენილია ირაციონალური განტოლების ამოხსნის რამდენიმე ხერხი:

1) „კვადრატში აყვანა“. ამ შემთხვევაში, ხშირად, არ გვაქვს ტოლფასი გარდაქმნა; მოსწავლეებთან ერთად განვიხილავთ ამის მიზეზებს – რატომ შეიძლება მივიღოთ ე. წ. გარეშე ფესვი; რიცხვი, რომელიც მიღებულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ხოლო მოცემულს — არ აკმაყოფილებს.

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემა აჯამებს საკითხის განხილვას — მოსწავლემ უნდა შეძლოს პასუხის გაცემა კითხვებზე: რა არის ირაციონალური განტოლება? რატომ არის აუცილებელი ირაციონალური განტოლების ამოხსნის პროცესში მიღებული ამონახსნების შემოწმება? ეს რიცხვები ამოხსნის პროცესშია მიღებული. ამოხსნა მაშინ მთავრდება, როცა ფესვები დადგენილია (გარეშე ფესვი, თუ არსებობს, გამოვლენილია და ამონახსნებიდან გამოორიცხულია).

„ტესტები“ შეიძლება კლასში სწრაფად „გავიაროთ“ — მოსწავლე ადასტურებს, რომ იცის, რა არის ირაციონალური განტოლება, შეუძლია, შეამოწმოს, არის თუ არა მოცემული რიცხვი ირაციონალური განტოლების ფესვი; იცის, რომ კვადრატული ფესვი ყოველთვის არაუარყოფითია.

კლასში ამოსახსნელი ამოცანები მოითხოვს ირაციონალური განტოლების ამოხსნის ორივე ხერხის განხილვას.

5 ე) $\sqrt{2x(x+3)}=6 \rightarrow 2x(x+3)=36$.

7 ა) $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{2x-3}$
 $x-2=1-2\sqrt{2x-3}+2x-3$
 $2\sqrt{2x-3}=x; x=2, x=6$.

შემოწმებით დავადგენთ, რომ $x=6$ გარეშე ფესვია. პასუხი: $x=2$.

8 ა) ამოცანის პირობა მიგვანიშნებს, რომ ახარისხების გარეშე შესაძლებელია ამოხსნა. საკითხის განხილვა შეიძლება შემდეგი კითხვების გამოყენებით წარიმართოს:

- აქვს თუ არა აზრი უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატულ ფესვს?
- x ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს აზრი $\sqrt{3-x}$ -ს ($x \leq 3$).
- შეიძლება თუ არა, რომ არაუარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი არსებობდეს? არის თუ არა $\sqrt{3-x}$ არაუარყოფითი რიცხვი? რა დასკვნა გამოგვაქვს (აუცილებლად, $x \geq 4$).

- არსებობს თუ არა x რიცხვი, რომელიც ორივე პირობას აკმაყოფილებს ($x \leq 3$ და $x \geq 4$)?

ბ) აქ, ცხადია, $3+\sqrt{x-1} \geq 3$, $\sqrt{3} > 1$. მაშასადამე, არ არსებობს x რიცხვი, რომლისთვისაც $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$.

გ) არ არსებობს x რიცხვი, რომლისთვისაც $2x-6 > 0$ და $3-x > 0$. $x=3$ კი არ აკმაყოფილებს განტოლებას.

დ) თუ არსებობს x რიცხვი, რომელიც მოცემული განტოლების ფესვია, მაშინ, ცხადია, $x \geq 4$ და $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5} \geq 5$. მაშასადამე, არ არსებობს x რიცხვი, რომლისთვისაც $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}=4,9$.

⑩ $(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)=5$

ორივე მხარე გავამრავლოთ $(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$ -ზე;

მივიღებთ:

$$(x+5-x)(\sqrt{x}-1)=5(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$$

$$\sqrt{x}-1=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x}-1=\sqrt{x+5}$$

$$4x-4\sqrt{x}+1=x+5$$

$$4\sqrt{x}=3x-4$$

$$\sqrt{x}=t, \quad 3t^2-4t-4=0$$

$$t_1=2, \quad t_2=-\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x}=2, \quad x=4.$$

ანალოგიურად განიხილება ⑪ ამოცანა.

⑪ $x(\sqrt{1+x}-1)=(1+x-1)(\sqrt{10+x}-4)$

$$x(\sqrt{1+x}-1)=x(\sqrt{10+x}-4)$$

$x=0$ არ არის განტოლების ფესვი.

მიიღება: $\sqrt{1+x}=\sqrt{10+x}-3$

ეს განტოლება ადვილად ამოიხსნება: $x=-1$.

⑫ ა) $x^2+3\sqrt{x^2-5x+1}=5(x-1)$

$$x^2-5x+1+3\sqrt{x^2-5x+1}+4=0$$

აღნიშვნა: $\sqrt{x^2-5x+1}=t$,

$$t^2+3t+4=0,$$

$$D=9-16<0$$

არ აქვს ამონახსნი.

ბ) $2x-\sqrt{x}-3=0$

$$\sqrt{x}=t$$

$$2t^2-t-3=0,$$

$$D=1+24=25.$$

$$t_1=\frac{3}{2}, \quad t_2=-1.$$

$$\sqrt{x}=\frac{3}{2}, \quad x=\frac{9}{4}.$$

ირაციონალური განტოლების ამოხსნის კიდევ ერთი ხერხი განიხილება ⑫ ამოცანის ამოხსნისას.

საშინაო დავალების „ტესტებზე“ პასუხების გაცემით მოსწავლეები ამჟღავნებენ ირაციონალური განტოლების, ირაციონალური განტოლების ფესვის ცნებების ცოდნას. ამოცანები კლასში განხილული ხერხებით იხსნება.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

12 დ) $x^2 + \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3x+1}{2}$

$$2x^2 - 3x + 2 - 3 + 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0$$

აღვნიშნოთ: $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t$.

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -3, \quad t_2 = 1.$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1; \quad 2x^2 - 3x + 2 = 1; \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

13 $(\sqrt{x+10} + \sqrt{x})(4 - \sqrt{x}) = 10$

ორივე მხარე გავამრავლოთ $(\sqrt{x+10} - \sqrt{x})$ -ზე, მივიღებთ

$$(x+10-x)(4-\sqrt{x}) = 10(\sqrt{x+10}-\sqrt{x}),$$

$$4-\sqrt{x} = \sqrt{x+10}-\sqrt{x},$$

$$\sqrt{x+10} = 4; \quad x+10 = 16;$$

$$x = 6.$$

6.4. წრფივი უტოლობა. წრფივ უტოლობათა სისტემა

პარაგრაფში წარმოდგენილი მასალით მოსწავლეები გაიხსენებენ და გაილრმავენ ცოდნას წრფივი ერთუცნობიანი უტოლობისა და წრფივ ერთუცნობიან უტოლობათა სისტემის ცნებებისა და ამოხსნის ხერხების შესახებ.

მოსწავლეთა მოტივაციის გაზრდის მიზნით, შეიძლება ისეთი პრაქტიკული ამოცანაც განვიხილოთ, რომელსაც უტოლობის ამოხსნამდე მივყავართ.

მაგალითად, შეიძლება განვიხილოთ ამოცანა მოძრაობაზე, რომლის ამოხსნა განტოლების ნაცვლად, უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამოხსნას მოითხოვს.

ვთქვათ, A ქალაქიდან დილის 6 საათზე B ქალაქში მივემგზავრებით და გზაში (C ქალაქში) 1-საათიანი შეჩვედრებია დანიშნული. რა მუდმივი სიჩქარით უნდა ვიმგზავროთ ავტომობილით, რომ C -ში 10 საათზე ადრე არ ჩავიდეთ, ხოლო B -ში – 18 საათზე გვიან? A -დან C -მდე მანძილი 400 კმ-ია, B -დან C -მდე — 480 კმ.

თუ სიჩქარეს x -ით აღვნიშნავთ, პირველი პირობა მოგვცემს უტოლობას $\frac{400}{x} \geq 4$.

მეორე პირობის თანახმად, x აკმაყოფილებს უტოლობას: $\frac{880}{x} \leq 11$. მაშასადამე, საძიებელი x სიდიდე ორ უტოლობას აკმაყოფილებს, ამ უტოლობათა სისტემის ამონახსნია. სისტემის ამონახსნის პოვნა კი თითოეული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლის პოვნით იწყება.

შეიძლება ამოცანის შერჩევა კლასში გათვალისწინებული დავალებებიდან (9) - (12).

ცვლადის შემცველ უტოლობებზე გადასვლა იწყება რიცხვითი უტოლობისა და მისი თვისებების გახსენებით; წინარე ცოდნის გააქტიურება რიცხვითი უტოლობების თვისებების განხილვით იწყება. ამ თვისებებს ერთუცნობიანი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამოხსნისას ვიყენებთ.

ყოველი რიცხვითი უტოლობა გამონათქვამია, რომელიც ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ცვლადის შემცველი უტოლობა კი გამონათქვამად გადაიქცევა, როცა ცვლადის ნაცვლად რიცხვს ჩავსვამთ; ვეძებთ ცვლადის იმ მნიშვნელობებს (ამონახსნებს), რომლებისთვისაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი მიიღება.

სიმრავლეთა და თეორიულ-ლოგიკური ტერმინოლოგია და სიმბოლიკა, რომლიც X კლასის I ნაწილში გავიარეთ, გვეხმარება უტოლობის ამოხსნისა და უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის გააზრებაში (რაც სისტემაში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთას წარმოადგენს).

უტოლობის თვისებების გამოყენება და ზემოთ აღნიშნული მეთოდის გამოყენება მაგალითებითაა ილუსტრირებული.

მაგალითების განხილვაში ყველა მოსწავლემ უნდა მიიღოს მონაწილეობა; მოსწავლეები იხსენებენ და ილრმავენ ცოდნას, რიცხვითი წრფის გამოყენებით, უტოლობებისა და უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეების დადგენაში.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ორმაგი უტოლობების სისტემის სახით გააზრება და ამოხსნის სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. მოდულის შემცველი უტოლობის ამოხსნისას (მაგალითი 8), ვიყენებთ მოდულის შემცველი განტოლების ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდს. თუმცა, შეიძლება უფრო საინტერესოა ამოხსნის გეომეტრიული ხერხის ილუსტრირება, როცა ვიყენებთ მოდულის გეომეტრიულ შინაარსს.

მაგალითად, $|x-2|+|x+1|>5$ უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს, რომ საკოორდინატო წრფეზე ვიპოვოთ ისეთი x რიცხვი, რომლიდანაც (-1) -მდე და 2 -მდე მანძილების ჯამი მეტია 5 -ზე. აქ ვიხსენებთ, რომ $|x-a|$ არის საკოორდინატო წრფეზე იმ წერტილებს შორის მანძილი, რომელთა კოორდინატებია x და a .

მაგალითად, $|x| < 2$ უტოლობით მოიცემა ყველა ის x რიცხვი, რომლიდანაც სათავემდე მანძილი ნაკლებია 2-ზე; $|x-1| < 2$ უტოლობით მოიცემა ყველა ის x რიცხვი, რომლიდანაც 1-ის ტოლი კოორდინატის მქონე წერტილამდე მანძილი ნაკლებია 2-ზე. ამ ფაქტების გამოყენებით, მოსწავლეები სწრაფად პოულობენ პასუხებს „ტესტებში“ დასმულ კითხვებზე.

ზოგიერთ საკონტროლო კითხვაზე სწორი პასუხის გაცემა მოითხოვს წრფივი ერთუცნობიანი უტოლობის გამეორებას, რომელიც ჩვენ ცნობარშია მოცემული.

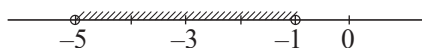
⑤, ⑥ და ⑦ ამოცანების ამოხსნა შეიძლება მოსწავლეებს კლასში დამოუკიდებელ დავალებად შევთავაზოთ.

⑧ ამოცანა დაწვრილებით გავარჩიოთ კლასში, გამოვიყენოთ ორივე ხერხი. ა) და ბ) ამოცანების ამოხსნა სირთულეს არ შეუქმნის მოსწავლეებს.

$$\begin{aligned} \text{ა) } -2 < x+3 < 2 \\ -5 < x < -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-(-3)| < 2 \\ x\text{-დან } (-3)\text{-მდე მანძილი ნაკლებია } 2\text{-ზე.} \end{aligned}$$

პასუხი: $(-5; -1)$.



$$\text{გ) } |x-5| + |x-1| < 12.$$

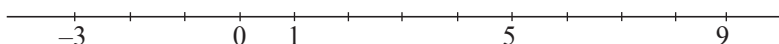


I გზა.

$\begin{cases} x \leq 1 \\ 5-x+1-x < 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2x > -6 \end{cases}$	$-3 < x \leq 1.$
$\begin{cases} 1 < x < 5 \\ 5-x+x-1 < 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 < x < 5 \\ 4 < 12 \end{cases}$	$(1; 5).$
$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5+x-1 < 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 5 \\ 2x < 18 \end{cases}$	$[5; 9).$

პასუხი: $(-3; 9)$.

II გზა. ვეძებთ იმ x -ს, რომლიდანაც რიცხვით წრფეზე მანძილების ჯამი 5-მდე და 1-მდე, ნაკლებია 12-ზე



$$5-1=4.$$

$$2 \cdot 4 + 4 = 12.$$

მაშასადამე, „გადავდივართ“ 5-ის მარჯვნივ 4 ერთეულით და 1-ის მარცხნივ 4 ერთეულით.

პასუხი: $(-3; 9)$.

მნიშვნელოვანია იმ პრაქტიკული ამოცანების განხილვა, რომელთა ამოხსნა დაიყვანება უტოლობების ამოხსნაზე.

⑩ ამოცანის პირობის თანახმად, გვაქვს x -ის მიმართ (შეკვრების რაოდენობის მიმართ) უტოლობა

$$\begin{aligned} \text{ა) } 20x + 75 &\leq 375, \\ x &\leq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ბ) } 20x &\leq 375, \\ x &\leq \frac{75}{4}. \end{aligned}$$

პასუხი: 15.

ვეძებთ უდიდეს მთელ ამონახსნს, **პასუხი:** 18.

- 11) გაყიდული პროდუქციის ღირებულება ლარებში — x ;
 $350+0,05x>1000$; $35000+5x>100000$;
 $5x>65000$; $x>13000$.

- 12) $3,5x-6000>1000$;
 $3,5x>7000$; $x>2000$.
სულ მცირე, 2001.

$$3,5x-6000\geq 0; \quad 3,5x\geq 6000;$$

$$x\geq \frac{6000}{3,5}\approx 1714,29.$$

პასუხი: 1715.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიურია.

1 ტესტით წარმოდგენილია წრფივი ერთუცნობიანი უტოლობა, რომელსაც ამონახსნი არ აქვს: $0\cdot x>7$.

2 თუ $k<0$, მაშინ $kx>3$ უტოლობის ამონახსნები ასე მოიცემა: $x<\frac{3}{k}$.

3 $|x|\leq 1$ ტოლფასია ორმაგი უტოლობის: $-1\leq x\leq 1$.

4 $|x-2|>1$ უტოლობას აკმაყოფილებს ის x , რიცხვები, რომლებისთვისაც, $x-2>1$ ან $x-2<-1$, ანუ $x>3$ ან $x<1$.

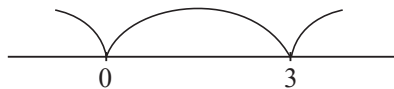
5 - 7 ამოცანების ამოხსნა ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს, 8 ამოცანის ანალოგიური ამოცანები კლასში ამოიხსნა.

9 შეკვეთილის საფასური — x ,
გადასახდელი თანხა — $x+0,07x$,
გვაქვს:
 $x+0,07x\leq 19$, $1,07x\leq 19$, $x\leq \frac{1900}{107}\approx 17,757$

პასუხი: არაუმეტეს $\approx 17,75$ ლარისა.

11) გ) $|x|+|3-x|\leq 3$

I ხერხი



$\begin{cases} x\leq 0 \\ -x+3-x\leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x\leq 0 \\ 2x\geq 0 \end{cases}$	$x=0.$
$\begin{cases} 0<x<3 \\ x+3-x\leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 0<x<3 \\ 3\leq 3 \end{cases}$	$0<x<3.$
$\begin{cases} x\geq 3 \\ x+x-3\leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x\geq 3 \\ x\leq 3 \end{cases}$	$x=3.$

პასუხი: $0\leq x\leq 3$.

II ხერხი:



x -დან 0-მდე და 3-მდე მანძილების ჯამი არ უნდა აღემატებოდეს 3-ს. მანძილების ჯამი 3-ის ტოლი იქნება $[0; 3]$ შუალედის ნებისმიერი წერტილისთვის. ცხადია, 3-ზე მეტი, ან 0-ზე ნაკლები რიცხვები ამ პირობას არ აკმაყოფილებს. პასუხია $[0; 3]$.

12 II ბანკში — x ლარი, I ბანკში — $(10\ 000 - x)$ ლარი.
 $x(1+0,07) + (10\ 000 - x)(1+0,05) \geq 10\ 616$,
 $x \cdot 0,02 \geq 10\ 616 - 10500$,
 $x \geq \frac{11600}{2}$,
 $x \geq 5800$.

13 დამატებითი საათების რაოდენობა — x
 1 საათში ანაზღაურება — $350/40 = 8,75$ ლარი
 1 სთ. დამატ. ანაზღაურება — $26,25$ ლარი.
 $350 + 26,25x \leq 800$
 $26,25x \leq 450$
 $x \leq \frac{45000}{2625} \approx 17,14$.

პასუხი: 17 სთ.

14 $1000(1+2r) \leq 1250$
 $1+2r \leq \frac{1250}{1000}, \quad 2r \leq 0,25, \quad r \leq 0,125$.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

მიმოხილვები:

① $(2a-8)x=4-a$

$$\begin{cases} 2a-8=0 \\ 4-a=0 \end{cases} \quad | \quad a=4.$$

② $\frac{4x+6 \cdot 3}{3+x}=5,5$

აქედან ვიპოვით x -ს.

④ x -ის დასაშვები მნიშვნელობები მიიღება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq k. \end{cases}$$

ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია, თუ $k > 7$.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ამონახსნის არსებობისთვის აუცილებელია, რომ k იყოს ≤ 7 . თუ $k \leq 7$, მაშინ კვადრატში აყვანით მივიღებთ $x = k + \frac{7}{2}$.

შემომდებით ვრწმუნდებით, რომ ეს არ არის გარეშე ფესვი. ამრიგად $k \leq 7$ პირობა საკმარისიცაა განტოლების ამონახსნის არსებობისთვის.

პასუხი: განტოლებას არ აქვს ფესვი, თუ $k > 7$.

⑤ ა) ამოვხსნით აღნიშვნის ხერხის გამოყენებით:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x} &= t, & t-5 &= -\frac{6}{t}, \\ t^2-5t+6 &= 0, & t_1 &= 3, & t_2 &= 2. \end{aligned}$$

ბ) $\sqrt{x^2+8x+16} = x(x+1)$

$$|x-4| = x(x+1)$$

$$x \geq 4, \quad x^2+x-x+4=0$$

$$x^2+4=0$$

არ აქვს ამონახსნი.

$$x < 4, \quad 4-x = x^2+x$$

$$x^2+2x-4=0$$

$x = -1 \pm \sqrt{5}$ ორივე ფესვი აკმაყოფილებს პირობას $x < 4$.

⑥ $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1 \cdot x_2=1,25 \end{cases} \quad | \quad \begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{1,25} \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{1,25} \end{aligned}$

$$x^2 - \frac{3}{1,25}x + \frac{1}{1,25} = 0, \quad 1,25x^2 - 3x + 1 = 0.$$

⑦ $x(5-2k) < 0$

ამონახსნი არ აქვთ, როცა

$$5-2k=0,$$

$$k=2,5.$$

⑨ $|7,8-x| < 18$

$$-18 < 7,8-x < 18$$

$$-25,8 < -x < 10,2$$

$$-10,2 < x < 25,8$$

უმცირესი მთელი ამონახსნი: -10 .

10



ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ზეპირად ვიპოვოთ (გეომეტრიული ხერხით). საკოორდინატო წრფეზე საძიებელი x -დან -5 -მდე და 6 -მდე მანძილების ჯამი 15 -ზე მეტია. ე. ი. x დაშორებულია 6 -დან მარჯვნივ და 5 -დან მარცხნივ $\frac{15-11}{2}=2$ ერთეულზე მეტი მანძილით:

$$x > 8 \text{ ან } x < -7$$

9 და -8 -ის ჯამია 1 .

VI თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

- 6 $(2a-3)x=b+1$, განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $2a-3=0$ და $b+1=0$,
 $a=1,5$ და $b=-1$,
 $a+b=0,5$.

- 7 $(4a^2-9)x=2a^2+3a$ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $4a^2-9=0$ და $2a^2+3a \neq 0$
 $a=\pm \frac{3}{2}$, ამასთანავე, $a \neq 0$ და $a \neq -\frac{3}{2}$

პასუხი: $a=\frac{3}{2}$.

- 8 განტოლებას მივცეთ სახე:
 $(a-b+1)x=2+3b$
 ა) აქვს ერთი ამონახსნი, როცა $a-b \neq -1$;
 ბ) აქვს უამრავი ამონახსნი, როცა
- $$\begin{cases} a=b-1 \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} a=-\frac{5}{3} \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

გ) არ აქვს ამონახსნი, როცა

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ b \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} a=b-1 \\ b \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

- 10 $V_1=V_2-0,4V_2=0,6V_2$,

$$\frac{5}{6}V_1+\frac{5}{6}V_2=120,$$

$$\frac{5}{6} \cdot 0,6V_2+\frac{5}{6}V_2=120,$$

$$\frac{5}{6} \cdot 1,6V_2=120,$$

$$8 V_2=720.$$

$$V_2=90 \text{ (კმ/სთ)}, \quad V_1=0,6 \cdot 90=54 \text{ (კმ/სთ)}.$$

- 11) მასა — x , სპირტი — $0,07x$
 100 გრამ ხსნარში 7 გ სპირტია;
 $0,07x-7=x \cdot 0,03$,
 საიდანაც $x=175$ (გრამი).

- 12) კვადრატულ განტოლებას 1 ფესვი აქვს,
 როცა $D=0$.
 $a^2-32=0$
 $a=4\sqrt{2}$, $a=-4\sqrt{2}$.

- 14) $ax^2+bx-3=a(x-\frac{1}{2})(x+3)$
 მაშასადამე, ფესვებია $\frac{1}{2}$ და -3 .

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-3=-\frac{b}{a} \\ -\frac{3}{2}=-\frac{3}{a} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x=2 \\ b=5. \end{array} \right.$$

- 15) $ax^2+4x-1=0$ განტოლებას ორი ფესვი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \neq 0$ და $16+4a>0$, $4a>-16$, $a>-4$.

პასუხი: $(-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

- 16) დ) $x^2-x-2=2x+2$, $x \neq -1$,
 $x^2-3x-4=0$
 $x=-1$, $x=4$, $x \neq -1$.

პასუხი: $x=4$.

- 18) $V=x$, $V+20=x+20$.
 $1\frac{2}{3}x=1\frac{1}{4}(x+20)$; $(\frac{5}{3}-\frac{5}{4})x=25$, საიდანაც
 $x=60$ (კმ/სთ), $S=\frac{5}{3} \cdot 60=100$ (კმ).

- 19) ა) $2x^2+5x-3=0$
 $x=\frac{-5 \pm 7}{4}$
 $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$;

- ბ) $4x^2+5x+1=0$
 $x=\frac{-5 \pm 3}{8}$
 $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{4}$.

- 20) გ) $\sqrt{9x^2-6x+1}=4$
 $|3x-1|=4$
 $3x-1=4$, ან $3x-1=-4$
 $x=\frac{5}{3}$, ან $x=-1$.

- 21) ა) $2\sqrt{x}+3(\sqrt{x})^2-1=0$
 $3t^2+2t-1=0$
 $t=\frac{-2 \pm 4}{6}$
 $t=\frac{1}{3}$, $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$
 $x=\frac{1}{9}$.

- ბ) $2x+\sqrt{2x-3}=5$
 $2x-3+\sqrt{2x-3}=2$
 $t^2+t-2=0$
 $t=-2$, $t=1$
 $\sqrt{2x-3}=1$
 $2x-3=1$
 $x=2$.

- 25) დ) $|x+5|+|x-2| \leq 7$

ამოცხსნათ ორი ხერხით.

I ხერხი:

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ -x-5+2-x \leq 7 \end{cases}$$

$$2x \geq -10$$

$$x \geq -5$$



$$x=-5.$$

$$\begin{cases} -5 < x < 2 \\ x+5+2-x \leq 7 \end{cases}$$

$$-5 < x < 2$$

$$7 \leq 7$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x+5=x-2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x \geq 2$$

$$2x \leq 4$$

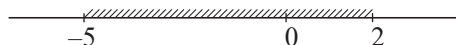
$$x \geq 2$$

$$x \leq 2$$

$$x=2$$

პასუხი: $[-5; 2]$.

II ხერხი:



ის x რიცხვები, რომლებიდანაც (-5) -მდე და 2 -მდე მანძილების ჯამი არის 7 , ეკუთვნის $[-5; 2]$ შუალედს, რადგან ამ შუალედის სიგრძე არის 7 .

26) შეტანილია თანხა — x ლარი.

$$x(1+3\cdot 0,04)=8400$$

$$x=8400:1,12$$

$$x=7500.$$

შემაჯავებელი ნაწილი

თემა: განტოლება, ერთუცნობიანი განტოლება, განტოლებათა სისტემა.

სამიზნე ცნებები: განტოლება, უტოლობა, სისტემა.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს უცნობი სიდიდის ცვლადით წარმოდგენა და განტოლების ან უტოლობის შედგენა; კვადრატული და წრფივი ერთ-უცნობიანი განტოლებების გამოკვლევა, ირაციონალური და მოდულის შემცველი განტოლებების მიყვანა კვადრატულზე, ამ განტოლებების სხვადასხვა ხერხით ამოხსნა.

ამოცანების ნიმუშები

ამოხსენით განტოლება ((1)-(4) დავალებები):

1) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{2(x-1)}{x-3} = 2.$

2) $x - \sqrt{2x-3} = 9.$

3) $\frac{x^2}{2} + 3x = \sqrt{x^2 + 6x} + 4.$

4) $(x-3)^2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 12.$

5) იპოვეთ a -ს ყველა მიშვნელობა, რომელთათვისაც $2a(a-1)x + 9 = ax + 6a$ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი.

6) ილიას და ლაშას ერთად 3870 ლარი ჰქონდათ. ილიამ თავისი თანხის 12%, ლაშამ — 10% მიუსაფარი ცხოველების დაცვის ფონდში გადარიცხეს, სულ — 424 ლარი. რამდენი გადარიცხა ილიამ და რამდენი ლაშამ?

7) იპოვეთ k -ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+k} = 0$ განტოლებას ზუსტად ერთი ფესვი აქვს.

8) რამდენი წვერო აქვს წესიერ მრავალკუთხედს, თუ მისი დიაგონალების რაოდენობაა 90?

9) საკოორდინატო წრფეზე x -დან (-1) -მდე მანძილი 5 ერთეულს არ აღემატება. ჩაწერეთ ეს წინადადება მოდულიანი უტოლობის სახით და ამოხსენით.

10) ყოველ წელს მანქანის ფასი მცირდება მისი თავდაპირველი ფასის 4%-ით. რამდენი წლის შემდეგ ეღირება 42 000-ლარიანი მანქანა 21 000 ლარზე ნაკლები?

პასუხები

① $x=-2$. ② $x=14$. ③ $x=-8$; $x=2$. ④ $x=7$; $x=-1$. ⑤ $a=1,5$. ⑥ ილია — 222 ლარი, ლაშა — 202 ლარი. ⑦ $k=5$; $k=8$. ⑧ 15. ⑨ $|x+1|\leq 5$; $[-6; 4]$. ⑩ 13 წლის შემდეგ.

მითითებები:

③ განტოლება მივიყვანოთ სახეზე: $x^2+6x=2\sqrt{x^2+6x}+8$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x^2+6x}=t$.

④ განტოლება გადავწეროთ ასე: $(x-3)^2=|x-3|+12$; $|x-3|^2=|x-3|+12$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $|x-3|=t$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

① გარდაქმნებით წრფივ განტოლებამდე მიყვანა შეფასდეს 1 ქულით, პასუხის მიღება — კიდევ 1 ქულით, სულ — 2 ქულა.

② რადიკალის ნიშნიანი გამოსახულების განცალკევება და განტოლების ორივე მხარის კვადრატში აყვანა შეფასდეს 1 ქულით; 0,5 ქულით — მიღებული განტოლების ამოხსნა და კიდევ 0,5 ქულით — გარეშე ფესვის აღმოჩენა. სულ — 2 ქულა.

③ აღნიშვნის შემოტანა შეფასდეს 0,5 ქულით; მიღებული კვადრატული განტოლების ამოხსნა და მისი ფესვებიდან გამოსადეგის შერჩევა — 1 ქულით; აღნიშვნის გათვალისწინებით პასუხების მიღება — 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

④ განტოლების ჩანერა რადიკალის ნიშნის გარეშე: რადიკალის აღნიშვნით ან მოდულიან გამოსახულებაზე დაყვანით, შეფასდეს 1 ქულით; მიღებული განტოლების მიხედვით ამოცანის ამოხსნის დასრულება — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑤ განტოლების მიყვანა $mx=n$ სახემდე — 1 ქულა, a -ს მნიშვნელობის დადგენა — კიდევ 1 ქულა. სულ — 2 ქულა.

⑥ შემოიღო სათანადო აღნიშვნები და შეადგინა განტოლება — შეფასდეს 1 ქულით; ამოხსნა მიღებული განტოლება და დაადგინა ილიას და ლაშას თანხები — შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულა დაიწეროს გადარიცხული თანხების გამოთვლისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑦ იპოვა მრიცხველის ფესვები — 0,5 ქულა. აღნიშნა, რომ ამ ფესვებთაგან ერთ-ერთი უნდა იყოს მნიშვნელის ფესვი — კიდევ 0,5 ქულა. ფესვების მიმდევრობით მნიშვნელში ჩასმა და k -ს შესაბამისი მნიშვნელობების პოვნა — კიდევ 1 ქულა. სულ — 2 ქულა.

⑧ გამოსახა n -კუთხედის დიაგონალების რაოდენობა n -ით — 1 ქულა. განტოლების შედგენა და მისი ამოხსნა — კიდევ 1 ქულა.

⑨ პირობის ჩანერა მოდულიანი უტოლობის სახით შეფასდეს 1 ქულით; მოდულიანი უტოლობის ორმაგი უტოლობის, ანუ უტოლობათა სისტემის სახით ჩანერა — კიდევ 0,5 ქულით. 0,5 ქულა ემატება საბოლოო პასუხის მიღებისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑩ აღნიშნა წლების რაოდენობა x -ით და შეადგინა უტოლობა — 1 ქულა. ამოხსნა მიღებული უტოლობა — 0,5 ქულა. კიდევ 0,5 ქულა — ამონახსნთა სიმრავლიდან უმცირესი მთელი მნიშვნელობის პოვნისთვის. სულ — 2 ქულა.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულის დასაფიქსირებლად მიღებული ქულების ჯამი გაეყოთ 2-ზე და დავამრგვალოთ.

აქვე შევნიშნავთ, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის განსხვავებული გზა, ან ამოხსნის ძიებისას გადადგმული „რაციონალური ნაბიჯები“ უნდა შეფასდეს სათანადო ქულებით.

ამჯერად **განმავითარებელ შეფასებას** ვახდენთ VI თავის შემაჯამებელი წერის შედეგების გაცნობის კვალობაზე და ამ შედეგებს ვიყენებთ განმავითარებელი შეფასების ინსტრუმენტად.

განტოლებისა და უტოლობის ცნებები უმნიშვნელოვანეს მათემატიკურ ცნებებს განეკუთვნება. მათზე დაიყვანება მრავალი მოვლენისა და პრაქტიკული ამოცანის შესწავლა. მოსწავლეების მიერ ამ მიმართულებით დაგროვილი ცოდნის მარაგი და მისი მნიშვნელობა უკვე საკმაოდ შთამბეჭდავია და თქვენგან სასწავლო პროცესების წარმართვა დიდ ძალისხმევას მოითხოვს.

თქვენ უკვე არაერთხელ გაეცანით ჩვენს დაწვრილებით რეკომენდაციებს ამ აქტივობის არსისა და ჩატარების ფორმების შესახებ, იცნობთ ზოგად მიდგომებს, რომლებიც უნდა მოარგოთ ყოველ კონკრეტულ განმავითარებელ შეფასებას; ახდენთ მასალის ათვისების ხარისხის შეფასებათა კლასიფიკაციას სოლო ტაქსონომიის დონეების მიხედვით. თუმცა, თქვენი მოსწავლეების აკადემიური მზაობა და დამოკიდებულება სასწავლო პროცესისადმი, დამატებით, საკმაოდ მაღალ შემოქმედებით ჩართულობას მოითხოვს თქვენგან.

ჩვენი რეკომენდაციების უცვლელი პრინციპია: გაკეთდეს ძირითადი აქცენტი ცნებათა და მეთოდთა არსის წვდომაზე, ცოდნის გაღრმავებაზე და გამოყენებითი ასპექტების ჩართვაზე, შეფასება უნდა წარიმართოს ინტერაქტიულად — მთელი კლასის შემოქმედებითი ჩართულობით.

ძირითადი აქცენტი უნდა გაკეთდეს:

① ამოცანაში განტოლებისა და ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა ცნებაზე, წილადების შეკრებისა და განტოლების ამოხსნის გზაზე;

② ამოცანაში ირაციონალური განტოლების ცნებაზე, უმარტივესი ირაციონალური განტოლების ამოხსნის მეთოდზე, გარეშე ფესვის არსებობის მიზეზებზე.

③ ამოცანაში იმ სირთულეზე, რაც წარმოიქმნება მოცემული განტოლების კვადრატში აყვანისას, მისი აცილების გზებზე, მოხერხებული აღნიშვნის შემოტანით სირთულეების დაძლევაზე; გარეშე ფესვის გამორიცხვაზე.

④ ამოცანაში მოცემული განტოლების ფორმის ანალიზზე; ფესვის (რადიკალის) მოდულიან გამოსახულებაზე დაყვანაზე, ან, იქნებ, ფესვის აღნიშვნით კვადრატულ განტოლებაზე დაყვანაზე. ერთად განიხილეთ განტოლების ამოხსნის გზები.

⑤ ამოცანაში განტოლების კვლევაზე, მისი $mx=n$ სახემდე მიყვანაზე და მისი ამოხსნისას არსებულ სხვადასხვა შემთხვევაზე.

⑥ ამოცანაში მისი შინაარსის დეტალურ ანალიზზე, ამოხსნისას ცვლადის მოხერხებულ შერჩევაზე, განტოლების ამოხსნისას გარეშე ფესვის გამორიცხვაზე. აქვე კვლავ იმსჯელეთ პროცენტის შესახებ, დასვით საკონტროლო კითხვები: მაგალითად, რამდენჯერ იზრდება დადებითი რიცხვი 300%-ით გაზრდისას, რამდენი პროცენტით უნდა გაიზარდოს მოცემული რიცხვის 50%-ით შემცირებისას მიღებული რიცხვი, რომ აღდგეს მოცემული რიცხვი?

⑦ ამოცანაში წილადური გამოსახულების ნულების შესახებ; რამდენი ფესვი აქვს მრიცხველს? ვიეთის ფორმულების გამოყენებით ზეპირადაც ხომ ვერ აღმოვაჩინეთ ამ ფესვებს? როგორ მივაღწიოთ იმას, რომ მოცემულ განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი ჰქონდეს?

⑧ ამოცანაში მრავალკუთხედის დიაგონალების რიცხვის ფორმულაზე (თუ დაავიწყდათ, იქნებ კლასმა იზრუნოს მის გახსენებაზე). როგორ შეირჩევა ამოცანის ამონახსნი?

⑨ ამოცანის ამოხსნის გზის ძიებაზე. გააანალიზეთ ინტერაქტიულად ალგებრული და გეომეტრიული გზები. გაარკვიეთ რომელი გზის არჩევისკენ იხრება ყოველი მოსწავლის არჩევანი.

⑩ ამოცანაში სანყისი ფასის, ზრდის საპროცენტო მაჩვენებლისა და საბოლოო ფასის დამაკავშირებელი ფორმულის ანალიზზე — მარტივი თუ რთული პროცენტის ფორმულაა გამოსაყენებელი?

განმავითარებელი შეფასების დასასრულს მოისმინეთ მოსწავლეთა მიერ გამოთქმული მოსაზრებები, საკითხების განხილვისას თვალი ადევნეთ მოსწავლეთა რეაქციას და შეიტანეთ კორექტივები სწავლა-სწავლებასთან დაკავშირებულ თქვენ მიერ დაგეგმილ აქტივობებში.

VI თავის შემაჯამებელი წერის დავალებათა მიხედვით დავაკონკრეტებთ **სოლო ტაქსონომიის** ზოგადი ფორმით წარმოდგენილ მოსწავლეთა აკადემიურ მიღწევათა ხარისხის დონეებს:

პრესტრუქტურული დონე. ბუნდოვანი წარმოდგენა აქვს ამოცანაში უცნობი სიდიდეების ცვლადებით წარმოდგენაზე, რომ არაფერი ვთქვათ, შესაბამისი განტოლების ან უტოლობის შედგენაზე. ვერც მოცემული განტოლების ან უტოლობის ამოხსნას ახერხებს. ამონახსნის ცნებაც ბოლომდე არ აქვს გააზრებული.

უნიტრუქტურული დონე. მოსწავლეს უჭირს ტექსტური, არართული ამოცანის მიხედვით განტოლების შედგენა, თუმცა მარტივ განტოლებებს ხსნის; კარგად არ იცნობს უტოლობის თვისებებს და ამოხსნისას უშვებს შეცდომებს; მის ნაშრომში სწორ გარდაქმნებთან ერთად არის უხეში შეცდომებიც.

მულტიტრუქტურული დონე. მოსწავლეს შეუძლია საშუალო სირთულის ამოცანის შესაბამისი განტოლების შედგენა და ამოხსნა, თუმცა ზოგჯერ მის ამონახსნს ვერ უკავშირებს ამოცანის პირობას. დახვეწილი არ აქვს სიდიდეების განზომილებათა აღქმა, უცნობი ამოცანის ამოხსნის გაცნობისას შეუძლია მიყვეს გარდაქმნებს და აღწეროს ისინი.

მიმართებითი დონე. მოსწავლეს შეუძლია შექმნას დასმული არატრივიალური ამოცანის მათემატიკური მოდელი, ამოხსნას ის და შეარჩიოს ამონახსნები ამოცანის პირობის გათვალისწინებით. შეუძლია ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა გზის შერჩევა და ამ გზებით ამოცანის გადაჭრა.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს ღრმად აქვს გააზრებული გამოყენებულ ცნებათა არსი, შეუძლია კონკრეტული ამოცანის რამდენიმე მიმართულებით განზოგადება და მიღებული მათემატიკური მოდელების კვლევა, შეუძლია ამოხსნის შესაძლო გზებიდან ოპტიმალურის შერჩევა და არჩევანის ახსნა. შეუძლია თავისი ცოდნის მისადაგება ახალი ამოცანების კვლევასთან, მოცემული განტოლებით ან უტოლობით შესაბამისი საინტერესო ამოცანების შედგენა, კრიტიკულად აანალიზებს და აფასებს სხვათა მოსაზრებებს.

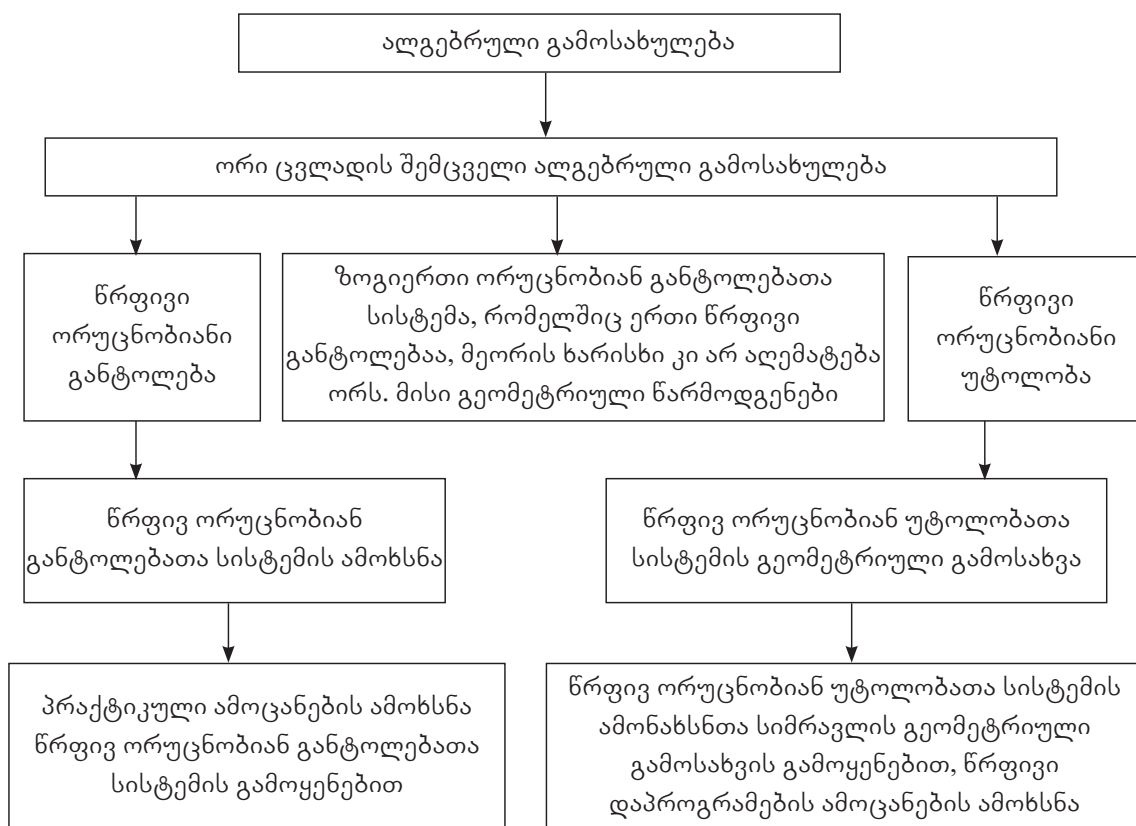
ორუცნობიანი განტოლებები, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები

თემა: ალგებრა და კანონზომიერებები საათების სავარაუდო რაოდენობა: 13 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	დავალებები, კომპლექსური დავალება
ზოგჯერ, ამოცანის პირობის შესაბამისად, შეიძლება შემოვიღოთ ორი ცვლადი და მათი საშუალებით, ჩავწეროთ კავშირები სიდიდეებს შორის, რომლებიც წრფივი ორუცნობიანი განტოლებებით, ან უტოლობებით გამოისახება. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება შეიძლება საკოორდინატო სიბრტყეზე წრფით გამოვსახოთ. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი ან უამრავი ამონახსნი. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსნი. წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა შეიძლება გამოვსახოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე; ყოველი წრფივი ორუცნობიანი უტოლობა სიბრტყეზე გამოსახავს ნახევარსიბრტყეს, უტოლობათა სისტემით შეიძლება გამოისახოს საკოორდინატო სიბრტყეზე კუთხე, ნახევარსიბრტყე, ზოლი; შეიძლება სისტემაში შემავალ უტოლობათა სისტემას ამონახსნი არ ჰქონდეს. ამოცანის პირობის შესაბამისად შეიძლება შევადგინოთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ერთ-ერთი წრფივია, მეორის ხარისხი კი არ აღემატება ორს და მისი კვლევისას გეომეტრიულ წარმოდგენებსაც გამოვიყენებთ.	წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა; წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა და მისი ამონახსნის გამოსახვა საკოორდინატო სიბრტყეზე. განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ერთ-ერთი წრფივია, მეორის ხარისხი კი არ აღემატება ორს.	რა გეომეტრიულ ფიგურას შეიძლება გამოსახავდეს საკოორდინატო სიბრტყეზე წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა? რა გეომეტრიულ ფიგურებს იცნობთ, რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეზე მეორე ხარისხის განტოლებით მოიცემა? რა გეომეტრიულ ფიგურას შეიძლება გამოსახავდეს სიბრტყეზე წრფივი ორუცნობიანი უტოლობა, უტოლობათა სისტემა? რა გეომეტრიულ ფიგურებს იცნობთ, რომელთა განტოლებები საკოორდინატო სიბრტყეზე მეორე ხარისხის ორუცნობიან განტოლებას წარმოადგენს?	უტოლობათა სისტემის გამოყენება

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, დასმული ამოცანის შესაბამისად, შემოიტანოს ორი ცვლადი და შეადგინოს ორუცნობიანი განტოლება, უტოლობა, ან ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა; წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის გეომეტრიული ხერხის გამოყენება; წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული გამოსახვის გამოყენებით, პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა — ცვლადებზე დადებითი შეზღუდვების პირობებში, ორი ცვლადის მიმართ წრფივი გამოსახულების მაქსიმუმის ან მინიმუმის პოვნა.

მე-7 თავში ვაგრძელებთ ალგებრის მიმართულების სამიზნე ცნებებთან დაკავშირებული საკითხების განხილვას. ამჯერად, ძირითადი სამიზნე ცნებებია: წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, წრფივი ორუცნობიანი უტოლობა და შესაბამისი სისტემები; მათი გამოყენებით, განვიხილავთ პრაქტიკულ ამოცანებს, რომლებიც ამ სამიზნე ცნებების თვისებების გამოყენებით იხსნება. განვიხილავთ ისეთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემებსაც, რომელშიც ერთი განტოლება წრფივია, მეორის ხარისხი კი არ აღემატება ორს.

VII თავში წარმოდგენილი საკითხები შეიძლება შემდეგი სქემით წარმოვადგინოთ:



კომპლექსური დავალება შეიცავს პრაქტიკულ ამოცანას, რომელიც წრფივ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის გეომეტრიული წარმოდგენის გააზრებას უკავშირდება.

§7.1. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება

წრფივი ორუცნობიანი განტოლების განხილვა წინა წლებშიც მიმდინარეობდა, წრფივი ფუნქციის თვისებებისა და გრაფიკის განხილვისას. ამ საკითხებს კიდევ დავუბრუნდებით და დებულებას წრფივი ორუცნობიანი განტოლების შესახებ დამტკიცებით წარმოვადგენთ; განხილული იქნება წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის პირობებიც. ამჯერად, მსჯელობას აღწერთი ხასიათი აქვს და ეყრდნობა წინარე ცოდნას — განტოლება, წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება. ახალ საკითხზე გადასვლა პრაქტიკული ამოცანის განხილვით იწყება, რომელიც უცნობი სიდიდეების მიმართ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების შედგენითა და შესწავლით გრძელდება. საკოორდინატო სიბრტყეზე განტოლებას წრფით წარმოვადგენთ. განტოლების შესაბამისად, განხილულია წრფის მდებარეობის სხვადასხვა შემთხვევა. მათ შორის მნიშვნელოვანია ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ცვლილებების შემოტანა.

წრფის სხვადასხვა სახის განტოლების, ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების პოვნისა და დახრის ცნების ცოდნას მოითხოვს საკლასო „ტესტური“ დავალებების ამოხსნა. საშინაო „ტესტები“ ანალოგიურია.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

⑥ ორ წერტილზე გამავალი წრფე Ox ღერძის პარალელურია, როცა „ვერტიკალური ცვლილება“ $\Delta y=0$.

ბ) $7-2b-1=0$, $2b=6$, $b=3$.

⑧ ა) $x=-2$ არის წრფე, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ჰორიზონტალური ცვლილება, $\Delta x=0$, დახრა არ არსებობს.

ბ) $y=-5$ არის წრფე, რომელიც Ox ღერძის პარალელურია; დახრა $k=0$.

⑩ დ) $\Delta y=-2+5=3$, $\Delta x=-1+3=2$, $k=1,5$.

⑫ ა) წრფე გადის წერტილებზე: $(0; -2)$; $(2; 0)$,

$$k=\frac{2}{2}=1, \quad b=-2, \\ y=x-2.$$

⑭ $P=1000(1+r)$. თუ $r=0,06$, მაშინ $P=1060$.

⑮ თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორ წრფეს საერთო წერტილი არ აქვს, მაშინ მათ პარალელური წრფეები ეწოდება. თუ ერთი წრფე Oy ღერძის პარალელურია (დახრა არ არსებობს, მაშინ მისი ნებისმიერი პარალელური წრფეც Oy ღერძის პარალელურია (დახრა არ არსებობს); ასეთი წრფეები მოიცემა ფორმულებით: $x=a$; $x=b$ (a და b განსხვავებული რიცხვებია). ცხადია, მათ შორის მანძილი გამოითვლება ასე: $|b-a|$ (x ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს შორის მანძილი).

ყველა სხვა შემთხვევაში, ორი წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრები ტოლია, ხოლო Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილები — განსხვავებული: $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები პარალელურია, თუ $k_1=k_2$, $b_1 \neq b_2$; ჭეშმარიტია შებრუნებული დებულებაც; თუ ორი წრფე, რომლებიც მოცემულია ფორმულებით: $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ პარალელურია, მაშინ $k_1=k_2$, $b_1 \neq b_2$).

18 $2x-3y=6$ განტოლებით მოცემული წრფის დახრა არის: $k=\frac{2}{3}$, Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია $(0; -2)$.

$4x=6y+6$ განტოლებით მოცემული წრფის დახრა არის: $k=\frac{2}{3}$; Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია $(0; -1)$.

მაშასადამე, ეს წრფეები პარალელურია.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიურია.

5 ბ) $P(3b-1; 5)$ და $Q(8; 4)$ წერტილებზე გამავალი წრფე y ღერძის პარალელურია, თუ $3b-1=8$, $b=3$.

7 ა) $x=4$, k დახრა არ არსებობს; ბ) $y=3$, $k=0$.

10 დ) წრფე გადის წერტილებზე: $(8; -3)$ და $(8; 3)$; k დახრა არ არსებობს; $\Delta x=0$.

ე) წრფე გადის $(-2; 3)$ და $(1; -1)$ წერტილებზე.

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad k=\frac{-1-3}{1+2}=-\frac{4}{3}.$$

12 ბ) წრფე გადის $(-3; 0)$ და $(0; -3)$ წერტილებზე;

$$k=-\frac{3}{3}=-1; \quad b=-3; \quad y=-x-3.$$

15 ვთქვათ, $M=(x; y)$, $B=(x_1; y_1)$, $A(x_1; y_2)$. მაშინ

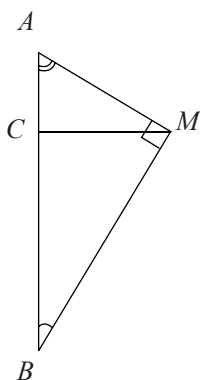
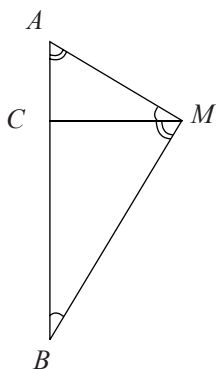
$(\Delta y)_1=y-y_1$ (I წრფის) და $(\Delta y)_2=y-y_2$ (II წრფის)

$$y-y_1=BC$$

$$y-y_2=-AC$$

სურათის მიხედვით, $\Delta x=x-x_1=MC$.

$$\frac{(\Delta y)_1}{\Delta x} = \frac{BC}{MC} = k_1, \quad \frac{(\Delta y)_2}{\Delta x} = -\frac{AC}{MC} = k_2.$$



თუ $\triangle AMB$ მართკუთხა სამკუთხედი, მაშინ

$$\triangle BMC \sim \triangle AMC;$$

$$\frac{BC}{MC} = \frac{MC}{AC};$$

$$\text{მაშასადამე, } k_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad k_1 \cdot k_2 = -1.$$

თუ წრფეები მოცემულია განტოლებებით: $y=k_1x+b$ და $y=k_2x+b$, ამასთანავე, $k_1k_2=-1$, მაშინ გვაქვს:

$$\frac{(\Delta y)_1}{\Delta x} \cdot \frac{(\Delta y)_2}{\Delta x} = -1, \quad \text{ანუ } \frac{y_1-y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{y_2-y};$$

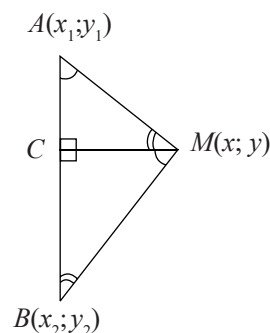
სურათის მიხედვით,

$$\frac{AC}{MC} = \frac{MC}{BC}.$$

ACM და MCB მართკუთხა სამკუთხედების კათეტები პროპორციულია, მაშასადამე, ეს სამკუთხედები მსგავსია: $\angle CAM = \angle BMC$ და $\angle CMA = \angle CBM$. მაშასადამე, $\angle AMB = 90^\circ$.

ამრიგად, შებრუნებული დებულებაც სწორია.

ამ საკითხს, მოსწავლეებთან ერთად, ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით.



§7.2. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა

ჩინა პარაგრაფის დავალების შემოწმებისა და წინარე ცოდნის (წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, გრაფიკი) გამეორების შემდეგ გადავდივართ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის განხილვაზე. ვიწყებთ პრაქტიკული ამოცანით, რომლის ამოხსნა ორი ცვლადის შემოტანითა და ორი ორუცნობიანი განტოლების შედგენით მიმდინარეობს. ვიხსენებთ და ვაზუსტებთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლებისა და წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ცნებებს. ვიხსენებთ სისტემის ამოხსნის ხერხებს: ჩასმის ხერხს, შეკრების ხერხს, გრაფიკულ ხერხს.

სიახლეა ისეთი სისტემის განხილვა, როცა ერთ-ერთი განტოლება არ არის წრფივი ორუცნობიანი განტოლება — ორი ცვლადის შემცველი მეორე ხარისხის განტოლება (მაგალითი 6). ამ სისტემასაც ორი ხერხით ვხსნით: I ხერხი ჩასმის ხერხია, მეორე — გრაფიკული ხერხი. შევნიშნოთ, რომ მეორე განტოლებით მოიცემა წრფივი: $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$.

კლასში ამოსახსნელი „ტესტებიდან“ გამოვყოთ ④. აქ მოითხოვება წრფივისა და წრფის ურთიერთგანლაგების შემთხვევების ცოდნა. ამ ფაქტის გახსენების შემდეგ, მოსწავლე ადვილად შეარჩევს სწორ პასუხს.

გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

⑥ დ)
$$\begin{cases} 3x = 6y + 5 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} Oy \text{ ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია:} \\ (0; -\frac{5}{6}) \text{ და } (0; -3) \end{array}$$

წრფეები პარალელურია, სისტემას არ აქვს ამონახსნი.

ე)
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -x + 2y = -6 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} (0; -3) \\ (0; -3) \end{array}$$

ორივე წრფისთვის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი არის $(0; -3)$. წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა; სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

7 ბ) $2x+3y=8$ და $2x-3y=8$;

$$k_1 = -\frac{2}{3}, \quad k_2 = \frac{2}{3}, \quad k_1 k_2 \neq -1.$$

წრფეები არაა მართობული.

გ) $6x-5y=2$ და $-10x=2+12y$;

$$k_1 = \frac{6}{5}, \quad k_2 = -\frac{5}{6}, \quad k_1 k_2 = -1,$$

წრფეები მართობულია.

10
$$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \left| \quad y=-x \quad \right| \quad -x^2=6$$

განტოლებას არ აქვს ამონახსნი, შესაბამისად, სისტემას არ აქვს ამონახსნი.

11 და 12 ამოცანები ადვილად იხსნება ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის გამოყენებით.

13 I ბანკში, x ლარი,
II ბანკში, y ლარი.

$$\begin{cases} 0,12x+0,1y=1020 \\ 0,1x+0,12y=960 \end{cases}$$

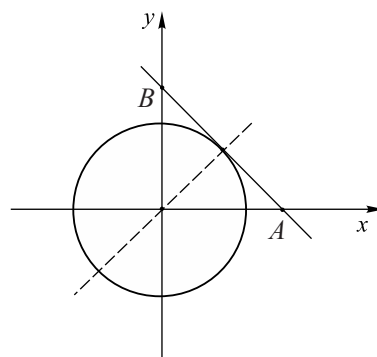
მივიღეთ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, რომელსაც ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

14 $x^2+y^2=4$ განტოლებით მოიცემა წრენირი.

ადვილად მივაგნებთ ორუცნობიან განტოლებას, რომელთანაც ერთად მოცემული განტოლება ქმნის სისტემას ორი ამონახსნით; შეიძლება ავიღოთ I და III მეოთხედების ბისექტრისა, რომელიც მოიცემა $y=x$ განტოლებით. ბისექტრისის მართობულ AB წრფეს წრენირთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს, ამასთანავე, $A=(2\sqrt{2}; 0)$, $B=(0; 2\sqrt{2})$. ამ წრფის განტოლებაა $y=-x+2\sqrt{2}$.

თუ ავიღებთ, მაგალითად, განტოლებას $y=-x+10$, დავრწმუნდებით, რომ იგი აკმაყოფილებს გ) პირობას. ცხადია, შეიძლება სხვა განტოლებებიც ავირჩიოთ. კლასში შეიძლება ჩავატაროთ შეჯიბრი — ვინ იპოვის მეტ განტოლებას.

საშინაო დავალების ამოცანები ანალოგიურია. მაგალითად, 15 ამოცანის ანალოგიური ამოცანის შემთხვევები კლასშია განხილული.



§7.3. წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა

ახალ მასალაზე გადასვლა წინარე ცოდნის გააქტიურებით მიმდინარეობს. სასურველია, გავიმეოროთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი გამოსახვა საკოორდინატო სიბრტყეზე. პრაქტიკული ამოცანით გაკვეთილის დაწყება ხელს უწყობს მოსწავლეთა მოტივაციის გაზრდას. მოსწავლემ უნდა იცოდეს, რომ ზოგიერთი ამოცანის პირობის თანახმად, უცნობი სიდიდეების აღმნიშვნელი ცვლადები შეიძლება გარკვეულ უტოლობას აკმაყოფილებდნენ. პრაქტიკული ამოცანის ყველა პირობის გათვალისწინებას მივყავართ წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემაში; x და y ცვლადები, რომლებიც, შესაბამისად, I და II ხარისხის პრემიებით დაჯილდოებულების რაოდენობებს აღნიშნავს, ოთხ უტოლობას აკმაყოფილებს. მე-3 და მე-4 უტოლობები გვიჩვენებს, რომ x და y არაუარყოფითი რიცხვებია.

გკითხულობთ: „თითოეული თანაფარდობა საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილთა რა სიმრავლით გამოისახება?“

შეიძლება $x+y \geq 10$ თანაფარდობა განვიხილოთ. მივმართავთ მოსწავლეებს (ერთ-ერთი დაფასთან მუშაობს):

- რა ფიგურით გამოისახება სიბრტყეზე $x+y=10$ განტოლება?
- რა სახით შეიძლება ჩაინეროს ეს განტოლება?
- რა სახით შეიძლება ჩაინეროს მოცემული უტოლობა? ($y \geq -x+10$)

მოსწავლეები გამოსახავენ $x+y=10$ წრფეს. შემდეგ მსჯელობენ იმ ფიგურის შესახებ, რომელიც მოიცემა $x+y \geq 10$, ანუ, $y \geq -x+10$ უტოლობით.

მოსწავლე მსჯელობს: ყოველი x -ისთვის, თუ $y = -x+10$, მაშინ (x, y) წერტილი მოცემულ წრფეზეა; თუ $y > -x+10$, მაშინ (x, y) წერტილი ეკუთვნის წრფით შემოსაზღვრულ „ზედა“ ნახევარსიბრტყეს.

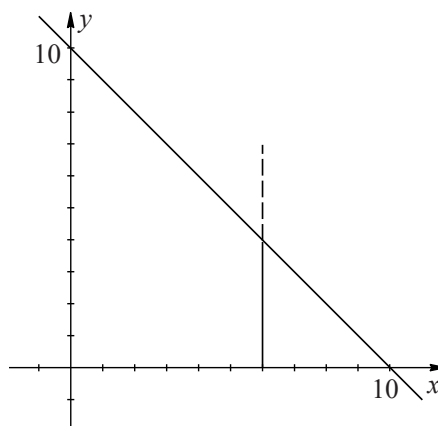
ანალოგიურად, განვიხილება $50x+80y \leq 800$, ანუ $5x+8y \leq 80$ უტოლობით განსაზღვრული ფიგურა, რომელიც შესაბამისი წრფით შემოსაზღვრული „ქვე-და“ ნახევარსიბრტყეა ($y \leq -\frac{5}{8}x+10$).

(1) სისტემაში მე-3 და მე-4 უტოლობებით განისაზღვრება საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედი.

აქ მოსწავლეები იყენებენ „სიმრავლურ“ ენას და აღნიშნავენ, რომ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ცალკეული უტოლობით განსაზღვრულ სიმრავლეთა (ნახევარსიბრტყეთა) თანაკვეთაა. ამას მოსდევს სიბრტყეზე საერთო ნაწილის დაშტრიხვა და რამდენიმე წერტილის მითითება.

მოსწავლეები პოულობენ სხვა ამონახსნებს და პოულობენ იმ წერტილს, რომელზეც $x+y$ მაქსიმალურია — $x+y=10$ წრფის პარალელური გადატანით ზევით, $x+y$ იზრდება და მაქსიმალურია, როცა $x=16$, $y=0$. მიმდინარეობს წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნებისადმი შემზადების პროცესი.

მოსწავლეებთან ერთად განვიხილავთ წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემის გამოსახვის მაგალითებს. განვიხილავთ ის შემთხვევები, როცა ამონახსნთა სიმრავლე კუთხეა, სამკუთხედი და ის შემთხვევა, როცა ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა — უტოლობებით წარმოდგენილ ფიგურებს საერთო წერტილი არ აქვს.



შეიძლება დავსვათ კითხვა შესაძლო შემთხვევების შესახებ და მოსწავლეებმა წარმოგვიდგინონ უტოლობათა სისტემები, რომლებიც იძლევა, მაგალითად, ზოლს, ნახევარსიბრტყეს, წრფეს, მართკუთხედს, კუთხეს.

$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \geq 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x+y \leq 10 \end{cases}$
ზოლი,	ნახევარსიბრტყე,	წრფე,
$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \\ y \geq 1 \\ y \leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 10 \end{cases}$	$\begin{cases} y \leq 1 \\ x+y \geq 2 \end{cases}$
მართკუთხედი,	ცარიელი სიმრავლე,	კუთხე.

მიითვებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

- 1 სურათის მიხედვით, $y \leq 2$, $y \geq x$ და $y \geq -x$.
- 2 ცხადია, მოცემულია მე-3 მეოთხედი.
- 3 აქ ვითვალისწინებთ, რომ $|x| \leq 2$ უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობის: $-2 \leq x \leq 2$; ამას ემატება $y \geq 0$ პირობა (ზედა ნახევარსიბრტყეში განთავსებული ზოლის ნაწილი).

4 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$ სისტემით ზოლი მოიცემა.

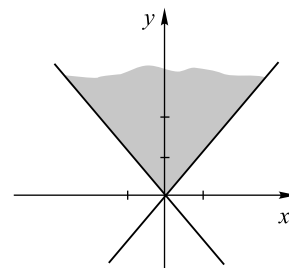
შეიძლება დამოუკიდებელი წერა ჩავატაროთ და გამოვიყენოთ 5 ამოცანის დავალებები.

აგრეთვე, შეიძლება საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული გეომეტრიული ფიგურის მიხედვით, შეადგინონ მოსწავლეებმა შესაბამისი უტოლობათა სისტემა.

6 ბ) ასეთი სისტემის ძებნა შეიძლება წარვმართოთ ჩვენთვის ნაცნობი ნახევარსიბრტყეების საშუალებით; მაგალითად,

$\begin{cases} y \geq x \\ y \geq -x \end{cases}$ სისტემა გვაძლევს კუთხეს;

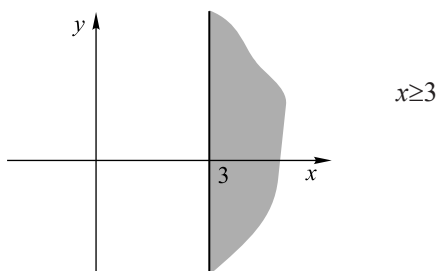
თუ დავამატებთ პირობას: $y \leq 0$, დაგვრჩება კუთხის წვერო.
ამ იდეის გამოყენებით, შეიძლება სხვა შემთხვევებიც ვიპოვოთ.



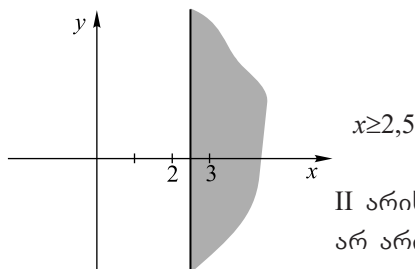
7 მიღებული უტოლობა — $x \geq -2,2$ არის მოცემულ უტოლობათა სისტემის შედეგი, არ არის მისი ტოლფასი; რაც იმას ნიშნავს, რომ, თუ (x, y) აკმაყოფილებს სისტემას, მაშინ $x \geq -2,2$; მაგრამ თუ გვაქვს მხოლოდ პირობა: $x \geq -2,2$, მაშინ შესაბამისი (x, y) წყვილები ($x \geq -2,2$ და ნებისმიერი y -სთვის) შეიძლება მოცემულ სისტემას არ აკმაყოფილებდეს; მაგალითად, განიხილეთ წერტილი $(0; 2)$.

შეიძლება მოსწავლეებთან ერთად კიდევ ერთი მარტივი მაგალითის განხილვა:

I. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$



II. $2x \geq 5, \quad x \geq 2,5$



II არის I-ის შედეგი, მაგრამ არ არის ტოლფასი.

- 9 ვთქვათ, x — ორთველიანების რაოდენობაა,
 y — სამთველიანების რაოდენობა.
 ამოცანის პირობის თანახმად,

$$2x + 3y \leq 100.$$

ადვილად ვიპოვით რამდენიმე $(x; y)$ წყვილს, რომლის კოორდინატები ამ უტოლობას აკმაყოფილებს.

- 10 ცხადია, ამოცანას აკლია პირობა: რამდენი გასროლა უნდა შეასრულოს ჯარისკაცმა. მაგალითად, შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ არაუმეტეს 10 გასროლით მოაგროვოს 60 ქულა მაინც; მაშინ, თუ მოხვედრათა რაოდენობა იქნება x , აცდენათა რაოდენობა y , $x + y \leq 10$ და $10x - 4y \geq 60$.

- 12 ამოცანაში დასახელებული შემთხვევები ზემოთ იყო განხილული.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, ანალოგიურია. მაგალითად,

- 7 ამოცანის, ამოხსნისას ვმსჯელობთ კლასში ამოხსნილი 7 ამოცანის ანალოგიურად.

9 I — x დღე
 II — y დღე
 $\begin{cases} 6x + 4y \leq 288 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$



I — x
II — y

პირველ (ა) შემთხვევაში, გვაქვს განტოლება, რომლის ამონახსნები არაუარყოფითი მთელი რიცხვები უნდა იყოს: $260x+80y=1600$, ანუ $13x+4y=80$.

y არაუარყოფითი მთელი რიცხვია მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$ ან $x=4$.

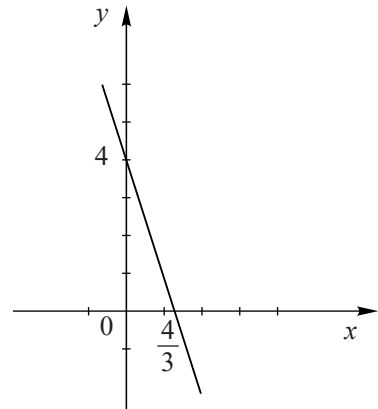
მეორე (ბ) შემთხვევაში, გვაქვს უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} 260x+80y \leq 1600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0; \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} 13x+4y=80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

ამონახსნია, მაგალითად, $(2; 10)$.



წრფეები პარალელურია, ან ემთხვევა ერთმანეთს. როცა $a=4$ წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა და სისტემით წრფე მოიცემა (ბ) შემთხვევა); თუ $a < 4$, გვექნება ცარიელი სიმრავლე; თუ $a > 4$, გვექნება ზოლი.



§ 7.4. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

წინარე ცოდნის (რომელიც ეხება წრფივ უტოლობათა სისტემის გამოსახვას საკოორდინატო სიბრტყეზე) გააქტიურებისა და წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შესახებ ისტორიული მიმოხილვის შემდეგ, გადავდივართ ამ თეორიის გადმოცემაზე; განვიხილავთ პრაქტიკულ ამოცანებს, რომლებიც მიიყვანება ორი ცვლადის მიმართ წრფივი (ცვლადები I ხარისხებშია) გამოსახულებების მაქსიმუმისა, ან მინიმუმის პოვნაზე, როცა ცვლადების მნიშვნელობები „შეზღუდვების“ პირობებს აკმაყოფილებს, ეს პირობები კი წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემით არის წარმოდგენილი.

ამოცანაში, რომელიც ფაბრიკის მიერ სკამებისა და სავარძლების დამზადების ისეთ ორგანიზაციას ეხება, როცა გვსურს, რაც შეიძლება მეტი მოგება მივიღოთ. ეს მოგება წრფივი ორუცნობიანი გამოსახულებით მოიცემა: $P=10x+18y$ (10 ლარი — 1 სკამის გაყიდვით მიღებული მოგებაა, 18 ლარი — 1 სავარძლის გაყიდვით მიღებული მოგება).

ამასთანავე, გვაქვს შეზღუდვები, რომლებიც დაკავშირებულია ფაბრიკის შესაძლებლობებთან — შეზღუდულია ფაბრიკის შესაძლებლობები სკამებისა და სავარძლების ასაწყობად და გასაყიდად გასამზადებლად. ეს შეზღუდვები წარმოდგენილია პარაგრაფის ტექსტში უტოლობათა (1) სისტემით. მოსწავლეები, ჩვენი დახმარებით, მსჯელობენ და ცდილობენ ტექსტში მოცემული შეზღუდვები უტოლობების სახით ჩაწერონ. უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის სიბრტყეზე გამოსახვის ჩვენები ეხმარება მოსწავლეებს, შეადგინონ შესაბამისი სურათი — მიიღება I მეოთხედში მდებარე ამოზნექილი მრავალკუთხედი (ოთხკუთხედი) $OABC$. $(x; y)$ წერტილები ამ ოთხკუთხედის წერტილებია და ვეძებთ იმ წერტილს (x და y ცვლადების მნიშვნელობათა ნყვილს), რომელშიც $P=10x+18y$ გამოსახულების მნიშვნელობა მაქსიმალურია.

აქ მოსწავლეებს ვაცნობთ წრფივი დაპროგრამების ძირითად პრინციპს — საძიებელი მაქსიმუმი ან მინიმუმი აუცილებლად ფიგურის რომელიმე წვეროში მიიღწევა. უმაღლეს სკოლაში ეს საკითხი შედარებით ზუსტად ისწავლება. პრინციპის განხორციელება გეომეტრიული თვალსაზრისით მიმდინარეობს. მასწავლებლების ნაწილმა იცის, რომ შეიძლება ამ საკითხის მეტი სიმკაცრით გადმოცემა და პრინციპის „დასაბუთების“ მცდელობა.

ზოგიერთი ავტორი ასეთ მსჯელობას გვთავაზობს: განვიხილავთ პარალელურ წრფეებს, რომელთა განტოლებაა $10x+18y=l$ (l მოცემული რიცხვია). როცა $l=0$, წრფე სათავეზე გადის, l -ის ცვლილებით და წრფის შესაბამისი პარალელური გადაადგილებით, მიიღება ახალი წრფე. თუ ასეთი პარალელური გადატანისას, წრფე მიღებული ოთხკუთხედის რომელიმე შიგა წერტილზე გადის, მაშინ l -ის ასეთი მნიშვნელობა არ იქნება $(10x+18y)$ -ის უმცირესი, ან უდიდესი მნიშვნელობა, რადგან l -ის „ოდნავი“ შეცვლით, კვლავ მივიღებთ წრფეს, რომელიც კვლავ შიგა წერტილზე გადის. თუ წრფე, როცა $l=l_1$, კვეთს ოთხკუთხედს მხოლოდ საზღვრის წერტილზე, მაშინ l -ის „მცირედი“ ცვლილებისას, მაგალითად, l -ის გაზრდისას, წრფეს აღარ ექნება საერთო წერტილი ოთხკუთხედთან. ამრიგად, თუ აღნიშნული $(x_1; y_1)$ წერტილი საზღვარზეა, მაშინ l -ის შესაბამისი l_1 მნიშვნელობა იქნება $(10x+18y)$ -ის უდიდესი მნიშვნელობა ამ ოთხკუთხედზე და იგი მიიღწევა ამ საერთო $(x_1; y_1)$ წერტილზე. ეს მსჯელობა ჩვენ მასწავლებლებისთვის მოვიყვანეთ. მოსწავლეებთან ვაცხადებთ: წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ძირითადი პრინციპის თანახმად, უდიდესი მნიშვნელობა ოთხკუთხედის რომელიმე წვეროზე იქნება.

„ტესტებითა“ და ამოცანების გამოყენებით, მიმდინარეობს ცოდნის განმტკიცება. „ტესტები“ წინარე ცოდნის გააქტიურებასაც ემსახურება. იმავე მიზნითაა წარმოდგენილი 4 და 5 ამოცანები, თუმცა, 5 ამოცანაში, დამატებით, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის პრინციპის ცოდნაც არის საჭირო.

6-8 ამოცანები წრფივი დაპროგრამების ამოცანებია; მოსწავლემ უნდა შეძლოს ორი ცვლადის შემოტანა; შეზღუდვების გათვალისწინება და შესაბამისი ფიგურის აგება; x და y ცვლადების მიმართ წრფივი გამოსახულების შედგენა და, პირობის გათვალისწინებით, უდიდესი, ან უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა.

6 ამ ამოცანაში, დამატებითი კითხვების საშუალებით, ვეხმარებით მოსწავლეებს ამოცანის ამოხსნაში.

ამოცანის პირობა შეიძლება შემდეგი ცხრილით წარმოვადგინოთ:

	მასა (კგ)	A	B
I	0,6	3	3
II	0,3	1	2

საერთო მასა: $f=0,6x+0,3y$.

შეზღუდვებით

$$\begin{cases} 3x+y \leq 600 \\ 3x+2y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ვეძებთ: } f_{\max}.$$

ჯერ ვეძებთ ოთხკუთხედის წვეროების კოორდინატებს.

$$\begin{cases} 3x+y=600 \\ 3x+2y=900, \end{cases} \quad \begin{cases} x=100 \\ y=300 \end{cases}$$

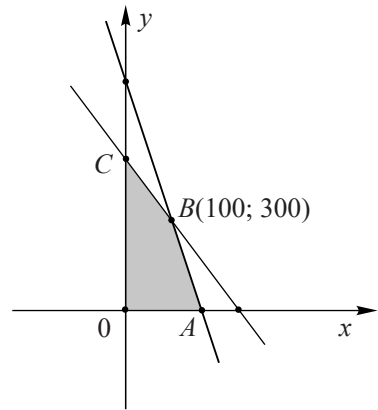
ვიპოვეთ ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

ამრიგად, წვეროთა კოორდინატებია $A(200; 0)$, $B(100; 300)$ და $C(0; 450)$. f -ის შესაბამისი მნიშვნელობებია:

$$f_1=120, f_2=150 \text{ და } f_3=135.$$

მაქსიმალურია 150 და ეს მნიშვნელობა მიიღწევა $B(100, 300)$ წვეროში.

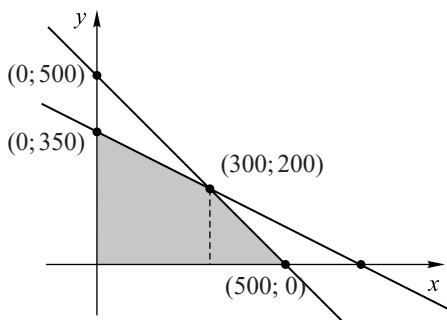
$$x=100, y=300.$$



- 7 ყოველდღიურად: x — სამგზავრო,
 y — სპორტული.

შეზღუდვებით:

$$\begin{cases} x+y \leq 500 \\ x+2y \leq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=200 \\ x=300 \end{cases} \quad \text{საზღვრის წერტილია.}$$



1 სამგზავრო, მოგება 1 ერთეული;

1 სპორტული, მოგება 1,5 ერთეული;

$$\text{მოგება: } f=x+1,5y$$

გამოვთვალოთ f -ის მნიშვნელობები საზღვრის წერტილებში:

$$(500; 0)\text{-ში } f_1=500.$$

$$(300; 200)\text{-ში } f_2=300+300=600.$$

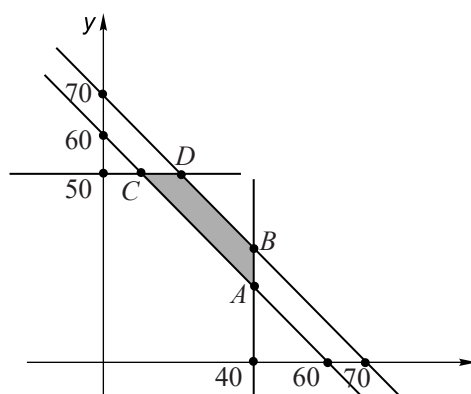
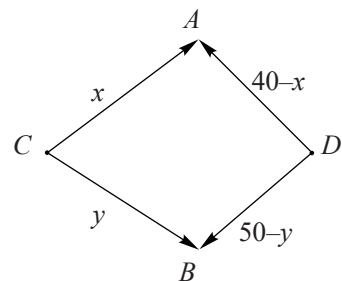
$$(0; 350)\text{-ში } f_3=0+1,5 \cdot 350=525.$$

$$\text{პასუხი: } x=300, y=200, f_{\max}=600.$$

- 8 x ტ — C -დან A -ში; $(40-x)$ ტ — D -დან A -ში;
 y ტ — C -დან B -ში; $(50-y)$ ტ — D -დან B -ში.

„შეზღუდვები“:

$$\begin{cases} x+y \leq 70 \\ 40-x+50-y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x \leq 40 \\ y \leq 50 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y \leq 70 \\ x+y \geq 60 \\ 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad \begin{cases} 60 \leq x+y \leq 70 \\ 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 50. \end{cases}$$



წვეროებია:

$$C(10; 50), D(20; 50), A(40; 20) \text{ და } B(40; 30).$$

გადატანის ხარჯია:

$$f=6x+2,5y+3(40-x)+1,5(50-y)=3x+y+195.$$

$$f \text{ მინიმალურია } C \text{ წერტილში: } f_c=80+195=275.$$

$$x=10, y=50.$$

9 მსუბუქი ავტომანქანების რაოდენობა — x
 სატვირთო ავტომანქანების რაოდენობა — y

შეზღუდვები:

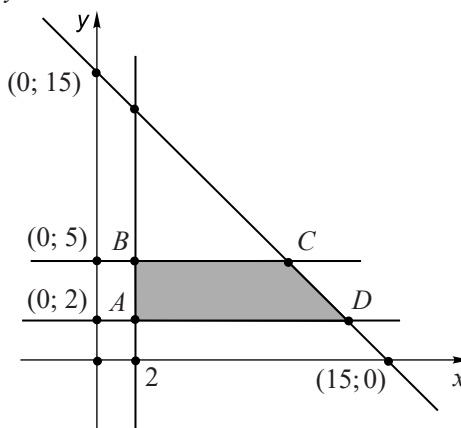
$$\begin{cases} 2 \leq x \\ 2 \leq y \leq 5 \\ x + y \leq 15 \end{cases}$$

თანხა: $f = 8x + 10y$

წვეროებია: $A(2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(10; 5)$, $D(13; 2)$.

f მაქსიმალურია $C(10; 5)$ წერტილში;

$f_{\text{მაქს}} = 8 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 130$ (ლარი)



10 I სახის — x ცალი, II სახის — y ცალი.

შეზღუდვები:

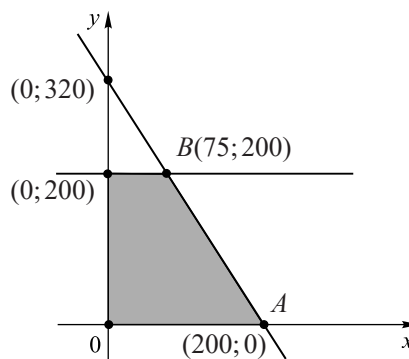
$$\begin{cases} 0,08x + 0,05y \leq 16 \\ 0,03y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 5y \leq 1600 \\ y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

მოგება: $f = 0,3x + 0,4y$

მოგება მაქსიმალურია $B(75; 200)$ წერტილში;

$f_{\text{მაქს}} = 0,3 \cdot 75 + 0,4 \cdot 200 = 102,5$ (ლარი).

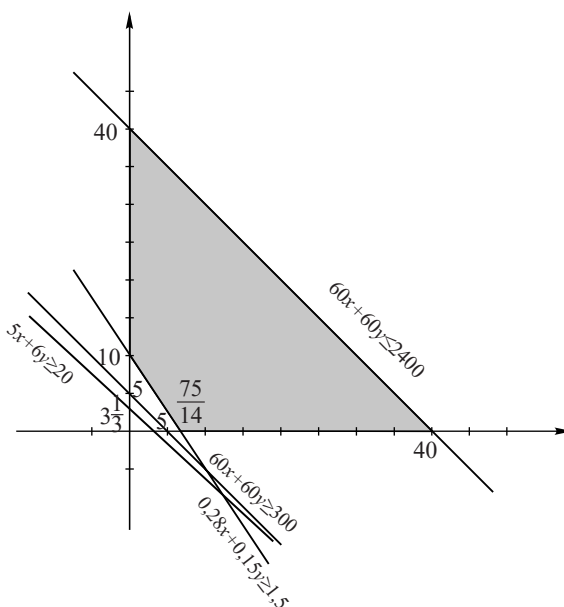
$x = 75$, $y = 200$.



კომპლექსური დავალება, რომელიც ცხოვრებისეულ სიტუაციებთან დაკავშირებულ საკითხებს შეიცავდა, მოითხოვდა სხვადასხვა ცოდნათა ინტეგრირებულ გამოყენებას; უკავშირდებოდა თავის სამიზნე ცნებებს — უტოლობა, წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა. კომპლექსური დავალების შესრულება შეიძლება §7.3-ის შესწავლის შემდეგ დაიწყოთ სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი აღნიშვნებისა და მოცემული კითხვების გამოყენებით, მოსწავლეები შეძლებენ უტოლობათა სისტემის შედგენას. მაგალითად, 1) დავალების მიხედვით, სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} 300 \leq 60x + 60y \leq 2400 \\ 0,28x + 0,15y \geq 1,5 \\ 5x + 6y \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

აქ x არის X წვენის შემცველი ფინჯნების რაოდენობა, y — Y წვენის.



მოსწავლეები შეძლებენ უტოლობათა სისტემის გრაფიკულ გამოსახვას.

$(0; 40)$, $(40; 0)$, $(0; 10)$ და $(\frac{75}{14}; 0)$ წვეროებია.

მაგალითად, $(0; 40)$ წვეროს შესაბამისი რაოდენობის წვენებში ადამიანი გადაიხდის $0,12 \cdot 0 + 0,15 \cdot 40 = 6$ ლარს; $(40; 0)$ წვეროს შესაბამისში კი — $0,12 \cdot 40 + 0,15 \cdot 0 = 4,8$ ლარს; $(0; 10)$ -ში — 1,5 ლარს.

$(\frac{75}{14}; 0)$ -ში — $75/14$ ფინჯან X წვენში, უფრო მეტიც 6 ფინჯანშიც კი გადაიხდის

$0,12 \cdot 6 + 0,15 \cdot 0 \approx 0,72$ ლარს — მინიმალურ თანხას.

წვენებში გადახდილი თანხა S გამოისახება ფორმულით: $S = 0,12x + 0,15y$. S -ის ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისთვის, საკოორდინატო სიბრტყეზე ამ დამოკიდებულებით წრფე მოიცემა. აქ მოსწავლეებმა შეიძლება გამოიყენონ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ძირითადი პრინციპი, S მინიმალურია მრავალკუთხედის ერთ-ერთ წვეროში.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

მითითებები:

① $k = -3$, ამასთანავე, $2a + 4b = 10$; მაშასადამე, a -სა და b -ს ვიპოვიოთ, თუ ამოვხსნით სისტემას:

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -\frac{a}{b} = -3. \end{cases}$$

შეიძლება ასეც ამოვხსნათ: საძიებელი წრფე იქნება $y - 4 = -3(x - 2)$ სახის. მართლაც, ეს წრფე გადის $(2, 4)$ წერტილზე და მისი დახრიაა -3 .

② პირობის თანახმად,

$$\begin{cases} |-5 - \frac{c}{2}| = 8 \\ -\frac{k}{2} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 + \frac{c}{2} = \pm 8 \\ k = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 6 \text{ ან } c = -26 \\ k = -4. \end{cases}$$

③ $1,2 + 0,7x = 0,5 + 0,9x$

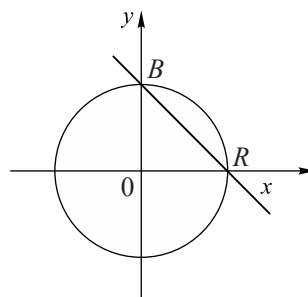
$$0,2x = 0,7$$

$$x = 3,5 \text{ (კმ)}$$

სულ გაიარა 7 კმ.

④ $\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + x - x^2 + 1 - 2x + x^2 = 7, \end{cases} \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3. \end{cases}$

- 5 ცხადია, $A=(R; 0)$, $B(0; R)$.
 $AB=R\sqrt{2}$.

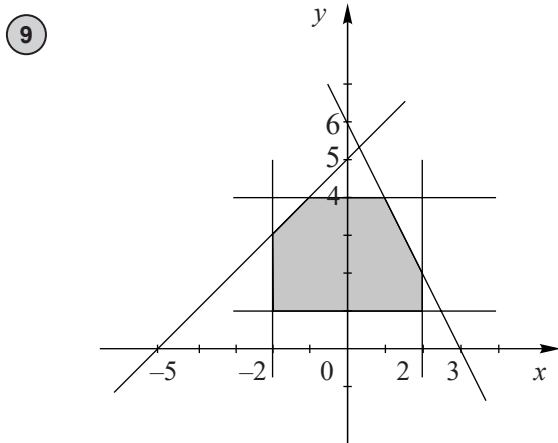


- 6 $k_1=3$, $k_2=-k$,

წრფეთა მართობულობის პირობით $-3k=-1$, $k=\frac{1}{3}$.

- 8
$$\begin{cases} kx+3y \leq 9 \\ -x+y \geq -m \end{cases} \quad \begin{cases} kx+3y \leq 9 \\ -3x+3y \geq -3m \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -\frac{k}{3}x+3 \\ y \geq x-m \end{cases}$$

მაშასადამე, $k=-3$ და $-m < 3$, $m > -3$.



- 10 I სახის — x ულუფა,
 II სახის — y ულუფა.
 შეზღუდვები:

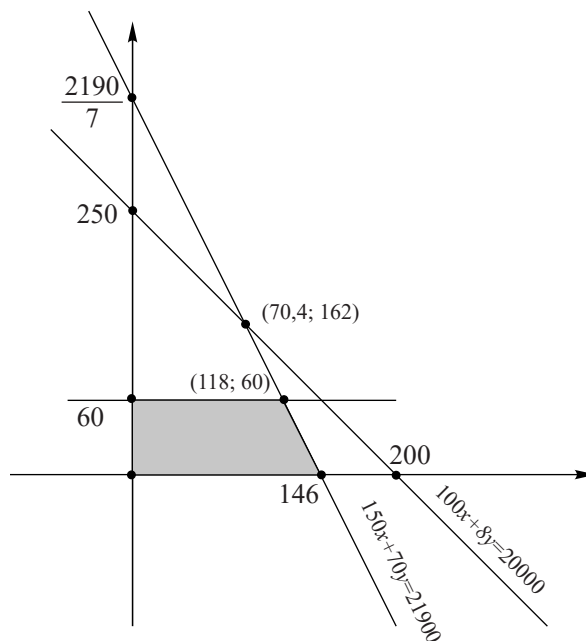
$$\begin{cases} 100x+80y \leq 20000 \\ 150x+70y \leq 21900 \\ 100y \leq 6000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+0,8y \leq 200 \\ 15x+7y \leq 2190 \\ y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ვეძებთ $t=1,5x+2,1y$ გამოსახულების მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

წვეროებია:

$(0; 60)$, $(118; 60)$, $(146; 0)$.

f მაქსიმალურია $(118; 0)$ წერტილში. ამ წერტილში $f=1,5 \cdot 118+2,1 \cdot 60=303$.



VII თავის დამატებითი ამოცანები

დამატებითი ამოცანები სხვადასხვა მიზნით შეიძლება გამოვიყენოთ: მოსწავლეთა ცოდნის გაღრმავებისთვის, თვითშეფასების „ტესტით“ გამოვლენილი ხარვეზების აღმოსაფხვრელად, დაბალი მზაობის მოსწავლეებთან დამატებითი მუშაობისთვის.

1 საძიებელი განტოლება შეიძლება ამ ფორმითაც წარმოვადგინოთ: $y-4=0,8(x+5)$.

2 ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლე იხსენებს მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრისა და ფართობის ფორმულებს. ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია: $A(0; 3)$ და $B(4; 0)$. OAB სამკუთხედის პერიმეტრი არის: $P=3+4+5=12$ (ერთ.) ფართობი: $S=\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4=6$ (კვ. ერთ.)

$$4 \quad k = \frac{2+8}{0-6} = -\frac{5}{3}.$$

4-8 ამოცანების საშუალებით, მოსწავლეები იმეორებენ და განიმტკიცებენ ცოდნას წრფის განტოლების შესახებ.

9 მოგება ლარებში არის $y=2,5x-4000$, სადაც x — მადულარების რაოდენობაა.

თუ $x=2000$, მაშინ $y=1000$ (ლარი).

თუ $y=10\ 000$, მაშინ $2,5x-4\ 000=10\ 000$,

$$2,5x=14\ 000$$

$$x=5600.$$

$$გ) \quad 2,5x-4000 > 0$$

$$2,5x > 4000$$

$$x > 1600 \quad \text{მოგება იწყება 1601 ცალის გაყიდვიდან.}$$

$$15 \quad \begin{cases} 6x+3ay \geq 9 \\ 6x-12y \leq 2b \end{cases}$$

წრფეები პარალელურია, ან ემთხვევა, თუ $a=-4$. ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ y \geq \frac{1}{2}x - \frac{b}{6} \end{cases}$$

ზოლი გვექნება, როცა $-\frac{b}{6} < -\frac{3}{4}$, $b > 4,5$;

ცარიელი სიმრავლეა, როცა $-\frac{b}{6} > -\frac{3}{4}$, $b < 4,5$;

როცა $b=4,5$, არის წრფე.

კუთხეა, როცა $a \neq -4$.

16 ვთქვათ, ჩაიდნების რაოდენობაა x , მაშინ

$$\text{ხარჯია } 6000+25x;$$

$$\text{შემოსული თანხაა } 42x;$$

$$\text{მოგებაა } 42x-6000-25x;$$

$$17x > 6\ 000$$

$$x > 352,9.$$

სულ ცოტა — 353.

შემაჯავებელი წერა

თემა: ალგებრა და კანონზომიერებები

სამიზნე ცნებები: ორუცნობიანი განტოლებები, მათი სისტემები;

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს: უცნობი სიდიდეების ცვლადებით წარმოდგენა და, პირობის შესაბამისად, წრფივი ორუცნობიანი უტოლობის ან უტოლობათა სისტემის შედგენა, გეომეტრიული წარმოდგენა და ამოცანის ამოხსნა.

ამოცანების ნიმუშები:

ამოხსენით ამოცანები

① იპოვეთ b -ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $x-(b-1)y=2$ და $(2b-5)x-5y=-2b$ წრფეები პარალელურია.

② იპოვეთ $(3; -2)$ და $(1; 5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრა, ჩაწერეთ ამ წრფის განტოლება. იპოვეთ ამ წრფის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

③ დაწერეთ $(-3; 4)$ წერტილზე გამავალი $2x-5y=1$ წრფის მართობული წრფის განტოლება.

④ ორი ერთნაირი წიგნი და 3 რვეული ერთად 31 ლარი და 30 თეთრი ღირს. რა ღირს წიგნი და რა ღირს რვეული, თუ წიგნი რვეულზე 10 ლარითა და 40 თეთრით ძვირია?

⑤ რა გეომეტრიული ფიგურა მოიცემა
$$\begin{cases} 3x-5y \geq 15 \\ 2x+y \leq 4 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობით? სისტემით? შეასრულეთ ნახაზი.

⑥ b -ს რა მნიშვნელობებისთვის არის
$$\begin{cases} y \leq -\frac{3}{4}x+4 \\ 4y+3x+1 \geq 4b \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი?

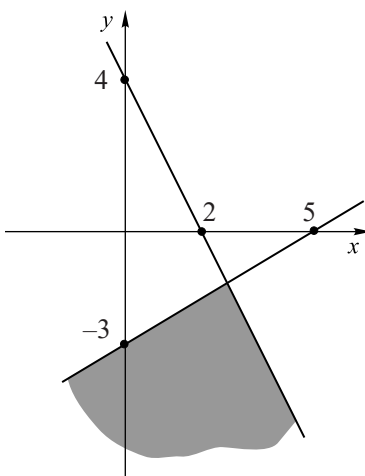
⑦ ამოხსენით განტოლებათა სისტემა; იგულისხმეთ, რომ $x>0$, $y>0$
$$\begin{cases} 5x-2y=12 \\ 2x^2-y=28. \end{cases}$$

⑧ გამოთვალეთ
$$\begin{cases} 2y+3x \leq 6 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
 სისტემით გამოსახული ფიგურის ფართობი.

⑨ a -ს რა მნიშვნელობებისთვის ეკუთვნის $(5; 3)$ წერტილი $3x-(a^2+1)y>0$ უტოლობით გამოსახულ ფიგურას?

⑩ ეთერს სჭირდება 6 ლარიანი ალბომები და 1,2 ლარიანი ფანქრები. მას შეუძლია დახარჯოს არაუმეტეს 48 ლარისა. ნივთების საერთო რაოდენობა 12-ზე ნაკლები არ უნდა იყოს. სულ დიდი რამდენი ნივთის ყიდვას შეძლებს ეთერი?

პასუხები: ① $b=0$, $b=3,5$. ② $k=-3,5$; $y=-\frac{7}{2}x+\frac{17}{2}$; $(0; 8,5)$ და $(\frac{17}{7}; 0)$. ③ $5x+2y+7=0$.
 ④ წიგნი 12,5 ლარი; რეგული 2,1 ლარი. ⑤ თითოეული უტოლობით მოიცემა ნახევარ-სიბრტყე; სისტემით — კუთხე



⑥ $b > \frac{17}{4}$. ⑦ $(4; 4)$.
 ⑧ $\frac{4}{3}$ კვ. ერთ.
 ⑨ $(-2; 2)$. ⑩ 12.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

① თუ მოსწავლემ ორივე წრფის დახრა ჩაწერა და გაუტოლა ერთმანეთს, შეფასდეს 1 ქულით; კიდევ 1 ქულით შეფასდეს მიღებული განტოლების ამოხსნა და პასუხების დაფიქსირება. სულ — 2 ქულა.

② თუ მოსწავლემ გამოთვალა წრფის დახრა ($k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{7}{2}$), შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულა დაეწეროს წრფის განტოლების ჩაწერისთვის; ღერძებთან გადაკვეთის ყოველი წერტილის პოვნისთვის — 0,5 ქულა. სულ — 2 ქულა.

③ საძიებელი წრფის დახრის გამოთვლა (წრფეთა მართობულობის პირობის გათვალისწინებით $k \cdot \frac{2}{5} = -1$) შეფასდეს 1 ქულით; კიდევ 1 ქულა დაეწეროს საძიებელი წრფის განტოლების დაწერისთვის. სულ — 2 ქულა.

④ ტექსტის მიხედვით სისტემის შედგენა შეფასდეს 1 ქულით, კიდევ 1 ქულით — მიღებული სისტემის ამოხსნა და პასუხის დაფიქსირება. სულ — 2 ქულა.

⑤ თითოეული უტოლობით მოცემული ფიგურის დასახელება, და სურათზე გამოსახვა შეფასდეს 1 ქულით. კიდევ 1 ქულით შეფასდეს სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის გამოსახვა საკოორდინატო სიბრტყეზე და მიღებული ფიგურის დასახელება. სულ — 2 ქულა.

⑥ მეორე უტოლობის $y \geq -\frac{3}{4}x + \frac{4b-1}{4}$ სახით გადაწერა, ან დახრების ტოლობის დადგენა — შეფასდეს 0,5 ქულით. ამოცანის პირობის მიხედვით b -ს მიმართ უტოლობათა ($\frac{4b-1}{4} > 4$) ჩანერა — კიდევ 1 ქულით; 0,5 ქულით შეფასდეს ამ უკანასკნელის ამოხსნა და პასუხის დაფიქსირება. სულ — 2 ქულა.

⑦ ჩასმის, ან შეკრების ხერხით ერთ-ერთი უცნობის გამორიცხვა შეფასდეს 1 ქულით. მიღებული ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნა და სისტემის პასუხის დაფიქსირება — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑧ საკოორდინატო სიბრტყეზე სისტემით განსაზღვრული ფიგურის (სამკუთხედი) გამოსახვა და მისი ვერტიკალური (Oy ღერძზე მდებარე) კათეტის სიგრძის დადგენა — შეფასდეს 1 ქულით; Ox ღერძის პარალელური კათეტის სიგრძის გამოთვლა და სამკუთხედის ფართობის დადგენა — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑨ თუ გამოსახა უტოლობით განსაზღვრული ფიგურა საკოორდინატო სიბრტყეზე, ან (5; 3) წერტილის კოორდინატების ჩასმით მოცემულ უტოლობაში, მიიღო უტოლობა a -ს მიმართ, შეფასდეს 1 ქულით; a -ს მიმართ მიღებული უტოლობის ამოხსნა და პასუხის დაფიქსირება — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑩ თითოეული უტოლობის საზღვრის გამოსახვა საკოორდინატო სიბრტყეზე შეფასდეს 0,5 ქულით; საზღვრის წრფეების გადაკვეთის წერტილის პოვნა — კიდევ 0,5 ქულით; ნივთების მაქსიმალური რაოდენობის დადგენა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

10-ქულიანი სისტემით მოსწავლის შესაფასებლად მიღებული ქულების ჯამს გავყოფთ 2-ზე.

ახლა შემოგთავაზებთ VII თავის შემაჯამებელი წერის მიხედვის სარეკომენდაციო **განმავითარებელ შეფასებას**, რომელსაც თქვენ, ცხადია, თქვენი კლასის აკადემიური მზაობის, მოსწავლეთა ინდივიდუალური თვისებების გათვალისწინებით, კიდევ უფრო გააღრმავებთ და დააკონკრეტებთ.

ამ თავის განხილვის შემდეგ მოსწავლეები კიდევ ერთხელ დარწმუნდებიან მასში წარმოდგენილი საკითხების მრავალფეროვან პრაქტიკულ და თეორიულ გამოყენებაში. ეს გაგიოლებთ მოსწავლეთა აქტიური ჩართვის მიღწევას აღნიშნული შეფასებისას.

ყოველი განმავითარებელი შეფასება, როგორც უკვე არაერთხელ ითქვა, ორიენტირებული უნდა იყოს სამიზნე ცნებების არსის უფრო ღრმად გააზრებისა და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების გაღრმავებისკენ, კვლევის მეთოდების უკეთ წარმოჩენისკენ, პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრის გზების ანალიზისკენ. შეფასება აუცილებლად ინტერაქტიული ფორმით უნდა წარიმართოს.

ძირითადი აქცენტი უნდა გაკეთდეს:

① ამოცანაში — წრფის განტოლების რაობაზე, განტოლებაში კოეფიციენტების გეომეტრიული აზრის გარკვევაზე, საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების დადგენაზე, წრფეთა ურთიერთგანლაგებაზე, კერძოდ — წრფეთა პარალელურობაზე.

② ამოცანაში — მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის დახრაზე და გაძლიერდეს ეს საუბარი გეომეტრიული წარმოდგენებით. განიხილეთ წრფის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების დადგენის საკითხიც.

③ ამოცანაში — კვლავ ორი წრფის ურთიერთმდებარეობაზე. ამჯერად, ორი წრფის მართობულობის პირობა გაიხსენონ მოსწავლეებმა. მოცემულ (a, b) წერტილზე, მოცემული დახრის მქონე წრფის განტოლების შედგენისას იმსჯელეთ $y-b=k(x-a)$ სახის განტოლებაზეც. რატომ იქნება ეს განტოლება წრფის განტოლება? (ის წრფევია) როგორ შეამოწმებთ, რომ გადის (a, b) წერტილზე და რომ მისი დახრია k ? იმსჯელეთ ამოცანის ამოხსნის სხვა გზებზეც.

④ ამოცანაში — ტექსტური ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნაზე. ორი ან ერთი ცვლადის შემოტანით ამოცანის გადაჭრაზე.

⑤-⑥ და ⑧-⑨ ამოცანებში — საყურადღებო გეომეტრიულ წარმოდგენებზე, რომლებიც წრფივი უტოლობის და წრფივ ორუცნობიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნას უკავშირდება. განიხილეთ შემთხვევები, რომლებიც ორუცნობიანი ორი უტოლობის სისტემის ამოხსნისას შეიძლება შეგხვდეთ.

⑦ ამოცანაში — ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნის გზებზე.

⑩ ამოცანაში — წრფივი დაპროგრამების ამოცანის არსზე. ამ ამოცანის ნიმუშზე კლასმა კიდევ ერთხელ განიხილა ის ეტაპები, რომლებიც უნდა გადაილახოს ასეთი ამოცანის გადაჭრისას. სათანადო გეომეტრიული წარმოდგენების დემონსტრირებაში მთელი კლასი აქტიურად უნდა იყოს ჩართული.

VII თავის შემაჯამებელი წერის შედეგებისა და შემდგომი განმავითარებელი შეფასების მიხედვით თქვენ გაგიიოლდებათ დაადგინოთ ყოველი მოსწავლის აკადემიურ მიღწევათა ხარისხის დონე სოლო ტაქსონომიის კვლასიფიკაციის შესაბამისად:

პრესტრუქტურული დონე. მოსწავლეს ბუნდოვანი წარმოდგენა აქვს განხილულ თავთან დაკავშირებულ სამიზნე ცნებებზე და შესაბამის მკვიდრ წარმოდგენებზე. ვერ ახერხებს წრფივი ორუცნობიანი განტოლების გრაფიკის აგებას, უშვებს უხეშ შეცდომებს წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა და წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნისას.

უნიტრუქტურული დონე. ხსნის წრფივ განტოლებას, მაგრამ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემასა და წრფივ ერთუცნობიანი უტოლობის ამოხსნისას ზოგჯერ უშვებს შეცდომებს. მარტივ ამოცანებში იშველიებს გეომეტრიულ წარმოდგენებს.

მულტისტრუქტურული დონე. ხსნის ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემას, უჭირს ისეთი სისტემების ამოხსნა, რომლებშიც ერთი განტოლება მეორე ხარისხისაა, მეორე კი — წრფივი. იშველიებს გეომეტრიულ წარმოდგენებს. ორუცნობიან წრფივ უტოლობათა სისტემის ამონახსნის გეომეტრიული წარმოდგენისას ზოგჯერ აქვს ხარვეზები.

მიმართებითი დონე. მკაფიო წარმოდგენა აქვს განხილული თემის სამიზნე ცნებებზე, ხსნის განხილული სახის ყველა სისტემას და უკავშირებს მათ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის განხილვისას ზოგჯერ უშვებს მცირე შეცდომებს.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. უნაკლოდ აყალიბებს სამიზნე ცნებათა არსს და გათავისებული აქვს მკვიდრი წარმოდგენები. შეუძლია განხილულ ამოცანათა ანალოგიური ამოცანების ან მათი ზოგიერთი განზოგადების შემოთავაზება და მათი გადაჭრა ყველა შესაძლო შემთხვევის ამონურვით. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის პრეზენტაციას ახდენს მაფიოდ და დამაჯერებლად. ყველა დასმულ კითხვაზე მისი პასუხი ამომწურავია.

VIII ტაპი

გეომეტრიული ფიგურები

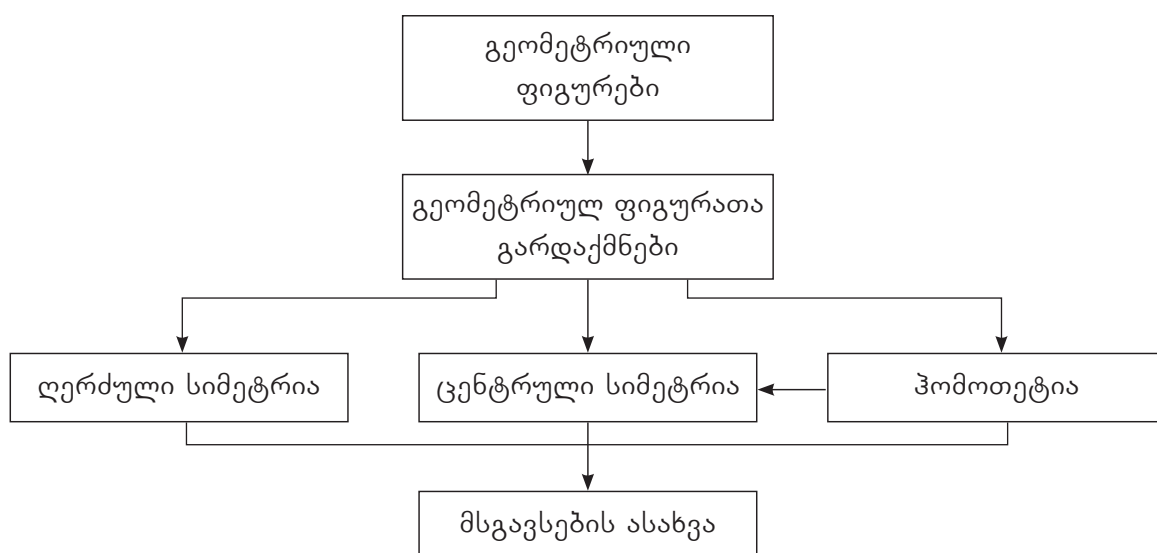
თემა: გეომეტრია და გაზომვა საათების სავარაუდო რაოდენობა: 32 საათი			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ბრტყელი და სივრცული ფიგურები; გეომეტრიული ობიექტების სიგრძის, ფართობის, მოცულობის გამოთვლა; გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე, კოორდინატებით წარმოდგენა; მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
გეომეტრიული ობიექტები, ზომები; კოორდინატები, გეომეტრიული გარდაქმნები; ზოგიერთი გეომეტრიული გარდაქმნის დროს ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება; ზოგიერთი გეომეტრიული გარდაქმნის დროს ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება. მსგავსების ასახვა შეიძლება მივიღოთ გადაადგილებისა და ჰომოთეტიის კომპოზიციით; გეომეტრიული ობიექტის გაზომვას სჭირდება ზომის ერთეულის შერჩევა	გეომეტრიულ ფიგურათა განსაზღვრება; სიგრძის, ფართობის, მოცულობის ფორმულები; მობრუნება სიბრტყეზე; მსგავსი, ფიგურები; მსგავსების ასახვები; ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში	როგორ ხდება გეომეტრიული ობიექტის სიგრძის, ფართობის, მოცულობის გამოთვლა? რა არის გეომეტრიული გარდაქმნა? რა სახის გეომეტრიული გარდაქმნები განიხილება? რა არის მსგავსების ასახვა?	გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენებები

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს, სწორად ჩამოაყალიბოს გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებები, სწორად აღწეროს გეომეტრიული ობიექტის ზომის გამოთვლის პროცესი; გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენებით, აღწეროს რეალური სიტუაციები; წარმოადგინოს გეომეტრიული გარდაქმნები ბუნებრივ მოვლენებში, ხელოვნებაში, არქიტექტურაში და შეასრულოს კომპლექსური დავალების მოთხოვნები, რომლებიც გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენებებს ეხება.

VIII თავი, ძირითადად ეძღვნება გეომეტრიის საკითხების გამეორებასა და ამ მიმართულებით ცოდნის გაღრმავებას. ვიმეორებთ გეომეტრიული ობიექტების კლასიფიკაციას სხვადასხვა ნიშნით — ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურები, სივრცულ გეომეტრიულ ფიგურებს; განვიხილავთ მრავალკუთხედებს, მრავალკუთხედების კერძო სახეებს: სამკუთხედებს, ოთხკუთხედებს, ...; განვიხილავთ ოთხკუთხედების კერძო სახეები: პარალელოგრამი, ტრაპეცია; სამკუთხედების სახეები კუთხეების მიხედვით, გვერდების მიხედვით — ტოლფერდა სამკუთხედები, რომლებიც არ არის ტოლგვერდა, ტოლგვერდა სამკუთხედები და სხვადასხვაგვარად სამკუთხედები. მოსწავლეს შევახსენებთ მონაკვეთის სიგრძის, მრავალკუთხედის ფართობისა და ზოგიერთი სივრცული ფიგურის (მართი პრიზმის, პირამიდის, ცილინდრის, კონუსის, ბირთვის) მოცულობის ფორმულებს. აღწერილია ფართობებისა და მოცულობის თვისებები და მოყვანილია მათი გამოყენების მაგალითები. დიდი ყურადღება ეთმობა გეომეტრიულ გარდაქმნას — სიბრტყის თავის თავზე შექცევად ასახვას; წარმოდგენილია გეომეტრიული გარდაქმნების სახეები — გადაადგილება და მსგავსების ასახვა, მათ ფიგურათა ტოლობისა და მსგავსების ცნებებს ვუკავშირებთ.

მნიშვნელოვანია ტრიგონომეტრიის ელემენტების შესწავლის დაწყება, მათი პრაქტიკული მნიშვნელობის გათვალისწინებით; განვიხილავთ მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, თანაფარდობებს მათ შორის; მახვილ კუთხეთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შექცევადობის საკითხს და ვიძლევი საწყის მასალას $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$ და arcctg ფუნქციების განსაზღვრელად, უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოსახსნელად.

VIII თავში წარმოდგენილი საკითხები შეიძლება შემდეგი სქემით წარმოვადგინოთ:



§8.1. გეომეტრიული ფიგურები და მათთან დაკავშირებული სიდიდეების გაზომვის მაგალითები

სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მასალა, რომელიც უკავშირდება სამიზნე ცნებებს — გეომეტრიულ ობიექტებსა და მათ ზომებს — ითვალისწინებს მოსწავლეთა სივრცული წარმოდგენების განვითარებას და მათემატიკის სტანდარტში მოცემულ ყველა შედეგს. დაწვრილებით არის აღწერილი გეომეტრიული ფიგურების ფორმები და მიმართებები მათ ელემენტებს შორის. შეჯამებულია მოსწავლეთა ცოდნა ბრტყელი და სივრცული ფიგურებისა და შესაბამისი სიდიდეების შესახებ. ფართობის თვისებების გამოყენებით, მოცემულია მართკუთხედის ფართობის ფორმულის მიღების მარტივი ხერხი. გეომეტრიული ფიგურების თვალსაჩინოდ აღწერა და დახასიათება დაეხმარება მოსწავლეებს, რომ ყოფით გარემოში ადვილად ამოიცნონ სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა, შეძლონ, წარმოდგენილი ფორმულების გამოყენებით, გამოთვალონ შესაბამისი სიდიდეები (ფართობი, მოცულობა).

ოთხკუთხედისა და პარალელოგრამის მაგალითზე აღწერილია კერძო ცნების უფრო ზოგადი ცნებიდან გამოყოფის წესი და ახალი ცნების დამატებითი მახასიათებელი თვისების გამოყოფა.

მოსწავლეებმა მე-10 კლასში შეისწავლეს თეორემისა და მისი შებრუნებულის ერთი წინადადებით ჩამოყალიბება, როცა გამოიყენება ტერმინები: „აუცილებელია“, „საკმარისია“. ვიყენებთ ფრაზას — „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“. წინადადებების სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა ხელს უწყობს მსჯელობა-დასაბუთების უნარის განვითარებას, საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების მიზნების განხორციელებას.

გეომეტრიული ფიგურების თვისებების და მათთან დაკავშირებული სიდიდეების (ფართობი, მოცულობა) შესახებ ცოდნის განმტკიცება ამოცანების ამოხსნით მიმდინარეობს.

კლასში მუშაობისთვის განკუთვნილ „ტექსტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა მოითხოვს გეომეტრიული ფიგურების კლასიფიკაციისა და გეომეტრიული ფიგურების თვისებების ცოდნას. ცხადია, ყოველი მართკუთხედი პარალელოგრამია; მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, დიაგონალები ტოლია; მართკუთხა სამკუთხედში უდიდესი გვერდი ჰიპოტენუზაა; წრენირის განსაზღვრების თანახმად, თუ $p(x; y)$ წერტილი ეკუთვნის r -რადიუსიან წრენირს, რომლის ცენტრია სათავე, მაშინ $x^2 + y^2 = r^2$. მოსწავლეები იხსენებენ წესიერი სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ (a არის სამკუთხედის გვერდი); ზოგიერთმა მასწავლებელმა შეიძლება გადაწყვიტოს, რომ ეს ფორმულა დამტკიცდეს კლასში. სივრცულ ფიგურებთან დაკავშირებული სიდიდეების გამოთვლისას, მოსწავლეები იყენებენ ტექსტში წარმოდგენილ ფორმულებს.

15 ამოცანა ეძღვნება ყოველდღიურ ცხოვრებაში მათემატიკის გამოყენების მაგალითის განხილვას.

პატარა ხაჭაპურის ფართობი — 36π

ორი პატარა ხაჭაპური — 72π

ორი პატარა ხაჭაპურის ფასი — 15 ლარი

დიდი ხაჭაპურის ფართობი — 81π

დიდი ხაჭაპურის ფასი — 14 ლარი.

ამ მონაცემებიდან ცხადია, რომ მიზანშეწონილია დიდი ხაჭაპურის ყიდვა — $72\pi < 81\pi$ და 15 ლარი > 14 ლარი.

(მათი ერთი და იმავე ზომის ნაჭრებიდან დიდი ხაჭაპურის ფასი ნაკლებია).

16) $1 \text{ მ}^2 = 10000 \text{ სმ}^2$;
 $12,6 \text{ მ}^2 = 126\,000 \text{ სმ}^2$.

17) ამ ამოცანის ამოხსნისას, მოსწავლეები იყენებენ ფართობის თვისებებს, გეომეტრიულ ფიგურათა ფართობის ფორმულებს.

გ) $S = 6 \cdot 4 + 4\pi \approx 24 + 12,56 = 36,56 \text{ (სმ}^2\text{)}$.

19) ბ) $V = x^3$, $V_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$, $V_1 = \frac{V}{8}$, შემცირდება 8-ჯერ.

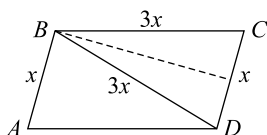
20) $\sqrt{\frac{35x^2}{4}} \cdot x = 70$

$35x^4 = 4 \cdot 70^2$

$x^4 = \frac{4 \cdot 70^2}{35}$

$x^4 = 4 \cdot 35 \cdot 2^2$

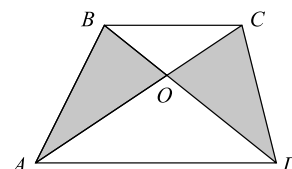
$x = 2\sqrt[4]{35}$, $3x = 6\sqrt[4]{35}$.



21) პირობის თანახმად, გვექნება: $S_{ABC} = S_{BDC}$, მაშასადამე, ამ სამკუთხედებში BC გვერდისადმი A და D წერტილებიდან გავლებული სიმაღლეები ტოლია. მაშასადამე, $BC \parallel AD$.

თუ $AB \parallel CD$, მაშინ $ABCD$ პარალელოგრამია;

თუ $AB \nparallel CD$, მაშინ $ABCD$ ტრაპეციაა.

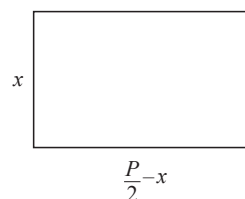


23) P — პერიმეტრი;

S — ფართობი,

$S = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{P}{2}x$

მაქსიმალურია, როცა $x = \frac{P}{4}$, ანუ, მართკუთხედი კვადრატია.

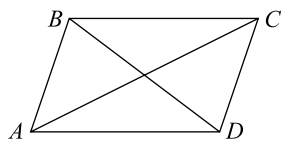
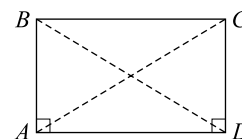


24) თუ პარალელოგრამი მართკუთხედი, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია. აქ დიაგონალების ტოლობა აუცილებელი პირობაა.

დამტკიცება.

$ABCD$ მართკუთხედი, მაშინ $\triangle ACD$ და $\triangle ABD$ მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია (მათ კათეტები ტოლი აქვს).

ამიტომ $AC = BD$.



თუ პარალელოგრამში დიაგონალები ტოლია, მაშინ პარალელოგრამი მართკუთხედი. აქ დიაგონალების ტოლობა საკმარისი პირობაა.

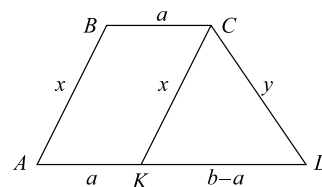
დამტკიცება.

$ABCD$ პარალელოგრამია, $AC = BD$, მაშინ $\triangle ACD = \triangle ABD$ (სამი გვერდით), ამიტომ $\angle A = \angle D = 90^\circ$.

25) $ABCD$ ტრაპეციაა.

უ. დ. $b - a < x + y$

გავავლოთ: $CK \parallel AB$, მაშინ $KD = b - a$, $KD < x + y$ (სამკუთხედის უტოლობა).



- 26) $ABCDEF$ წესიერი ექვსკუთხედი, მაშასადამე,

$$AB=BC=CD=DE=EF=0,2 \text{ (მ)}.$$

$$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=120^\circ,$$

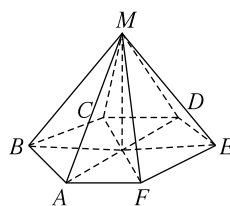
ამიტომ $AO=BO=CO=DO=EO=FO=0,2 \text{ მ}.$

პირობის თანახმად, $MA=1,4 \text{ მ}.$

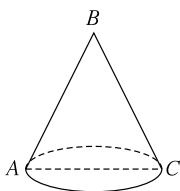
$$H=\sqrt{1,4^2-0,2^2}=\sqrt{1,6\cdot 1,2}=0,8\sqrt{3}.$$

$$Q=6\cdot\frac{0,2^2\sqrt{3}}{4}=0,06\sqrt{3}.$$

$$V=\frac{1}{3}Q\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 0,8\cdot 0,06\cdot 3=0,048 \text{ (მ}^3\text{)}.$$



27)



პირობის თანახმად,

$$AB=BC=2R$$

$$S_{\text{გ}}=\pi\cdot R\cdot 2R=2\pi R^2$$

$$\frac{S_{\text{გ}}}{\pi R^2}=\frac{2}{1}$$

28)

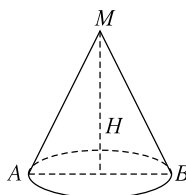
$$\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot H=12$$

$$RH=12$$

$$R=\frac{12}{4}=3, \quad AM=5.$$

$$S_{\text{გ}}=\pi\cdot R\cdot l=\pi\cdot 3\cdot 5=15\pi$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot 9\cdot 4=12\pi.$$



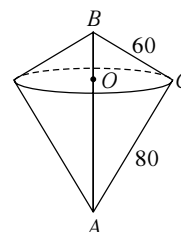
29)

$$AB=100$$

$$R=\frac{80\cdot 60}{100}=48.$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot BO+\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AO=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AB=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot 100=\frac{1}{3}\pi\cdot 48^2\cdot 100=76800\pi \text{ (სმ}^3\text{)}.$$

$$S_{\text{გ}}=\pi\cdot R\cdot 80+\pi\cdot R\cdot 60=\pi\cdot R\cdot 140=\pi\cdot 48\cdot 140=6720\pi \text{ (სმ}^2\text{)}.$$



30)

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3, \quad R^3=\frac{3V}{4}, \quad R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$S=4\pi R^2, \quad S=4\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}}.$$

საშინაო დავალების ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. „ტესტებიდან“ შეიძლება გამოვყოთ **4** და **12**.

4

პრიზმებიდან წახნაგების მინიმალური რაოდენობა, ცხადია, სამკუთხა პრიზმას აქვს — 5; n -კუთხა პრიზმას აქვს $(n+2)$ წახნაგი, $2n$ წვერო და $3n$ წიბო. $(n+2)+2n-3n=2$.

12

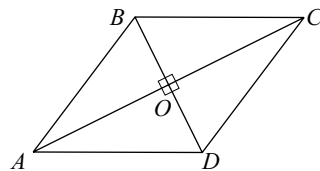
n -კუთხა პირამიდას აქვს $n+1$ წვერო, $(n+1)$ წახნაგი და $2n$ წიბო; $(n+1)+(n+1)-2n=2$. თუ $n=6$, წახნაგების რაოდენობაა 7.

ამ დავალებების შესრულების შემდეგ შეიძლება შევასხენოთ ეილერის თეორემა.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

23 თუ დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ პარალელოგრამი რომბია.

ABC სამკუთხედში BO სიმაღლეცაა და მედიანაც, ე. ი. $\triangle ABO = \triangle BOC$, $AB = BC$ — პარალელოგრამი რომბია.

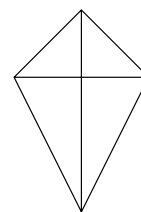
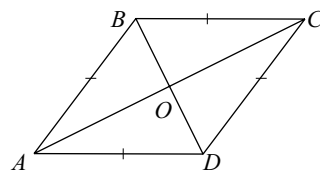


შებრუნებული: თუ პარალელოგრამი რომბია, მაშინ დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

$\triangle ABC$ ტოლფერდაა, BO მედიანაა, $\triangle ABO = \triangle BOC$ (სამი გვერდით), ამიტომ $\angle AOB = \angle COB = 90^\circ$.

პარალელოგრამი რომბი რომ იყოს, აუცილებელია და საკმარისი დიაგონალების ურთიერთმართობულობა.

პირველი პირობა არის საკმარისობა, მეორე — აუცილებლობა.

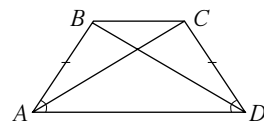


მიაქციეთ ყურადღება — ოთხკუთხედის დიაგონალების მართობულობა არაა საკმარისი პირობა იმისა, რომ ოთხკუთხედი იყოს რომბი (იხილეთ სურათი — მასზე დელტოიდია წარმოდგენილი).

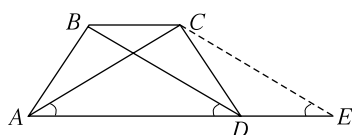
24 თუ ტრაპეცია ტოლფერდაა, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია.

წინასწარ უნდა აღინიშნოს, რომ $\angle A = \angle D$ (ადვილად მტკიცდება, თუ B და C -დან გაგავლებთ სიმაღლეებს).

$\triangle ACD = \triangle ABD$ (I ნიშნის თანახმად), ამიტომ $AC = BD$.



შებრუნებული: თუ ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ეს ტრაპეცია ტოლფერდაა.



გაგავლოთ: $CE = BD$, დიაგონალების ტოლობის გამო, $\triangle ACE$ ტოლფერდაა, მივიღებთ ტოლ კუთხეებს, რომლებიც მითითებულია სურათზე.

$\triangle ACD = \triangle ABD$ (I ნიშანი), ამიტომ $CD = AB$.

ტრაპეცია რომ ტოლფერდა იყოს, აუცილებელია და საკმარისი დიაგონალების ტოლობა (პირველი თეორემა — აუცილებლობა, მეორე — საკმარისობა).

§8.2. გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე. ცენტრული და ღერძული სიმეტრია

წინარე ცოდნა: A სიმრავლის B სიმრავლეში ასახვა; ასახვის თვისებები; გეომეტრიული ფიგურა.

წინარე ცოდნის გააქტიურების შემდეგ, გადავდივართ ასახვის ერთ-ერთ შემთხვევაზე — ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია გეომეტრიული ფიგურის წერტილთა სიმრავლეზე. მოსწავლეებთან ერთად, განვიხილავთ აღნიშნული ასახვის მაგალითებს; მაგალითი 1-ით წარმოდგენილია შემთხვევა, როცა მნიშვნელობათა სიმრავლე ემთხვევა B სიმრავლეს (A სიმრავლის B სიმრავლეში ასახვისას); B სიმრავლის ყოველი ელემენტისთვის არსებობს ელემენტი, რომელსაც ის შეესაბამება — ზე-ასახვა (უმაღლეს სკოლაში ასეთ ასახვას სიურექცია ეწოდება). ამასთანავე, თუ B სიმრავლის ყოველი ელემენტისთვის არსებობს A სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელსაც ეს ელემენტი შეესაბამება, მაშინ ასახვა შექცევადია.

წინა სახის არსებობას და ერთადერთობას მივყავართ შექცევად ასახვამდე (ბიექციამდე), ასეთი ასახვისთვის განვსაზღვრავთ შექცეულ ასახვას (f^{-1} არის f -ის შექცეული ასახვა).

შემდეგი მაგალითი წარმოგვიდგენს ასახვას, რომელიც არ არის შექცევადი — B და C წერტილებს ერთი — K წერტილი შეესაბამება, K წერტილი კი ორ წერტილს შეესაბამება.

შემოგვაქვს გეომეტრიული გარდაქმნის ცნება. ამ ასახვის კერძო შემთხვევაა გადაადგილება (მოძრაობა). მოსწავლეებთან ერთად ვასაბუთებთ კერძო შემთხვევებში ღერძული სიმეტრიისა და ცენტრული სიმეტრიის მნიშვნელოვან საერთო თვისებას — ღერძული სიმეტრია და ცენტრული სიმეტრია გადაადგილებაა.

მნიშვნელოვანია ღერძული სიმეტრიის ერთი პრაქტიკული გამოყენების მაგალითის ილუსტრაცია. პრაქტიკული მაგალითის განხილვით ცნების შემოტანა ზრდის მოსწავლეთა მოტივაციას.

ახალი სამიზნე ცნების (გეომეტრიული გარდაქმნები) შესახებ ცოდნის განმტკიცება მიმდინარეობს საკონტროლო კითხვებზე პასუხების მოძიებითა და ამოცანების ამოხსნით: ახალი სამიზნე ცნება უკავშირდება ალგებრის მიმართულების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სამიზნე ცნების (ასახვა) ახალი თვისებების შესახებ ცოდნის განმტკიცებას. მაგალითად, ① „ტესტში“ განხილულია ასახვა: $N \rightarrow \{0; 1; 2; 3; 4\} = B$; ყოველ n ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ნაშთი, რომელიც მიიღება n -ის 5-ზე გაყოფისას:

ცხადია, ეს ასახვა არის ზე-ასახვა; მაგრამ არ არის შექცევადი ასახვა და B -ს ყოველი ელემენტი შეესაბამება N -ის 1-ზე მეტ (უამრავ) ელემენტს. მოსწავლეებთან ერთად, გავიხსენოთ, რომ რომბი სიმეტრიული ფიგურაა მისი დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ — დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიისას, რომში აისახება თავის თავზე ④.

$y=|x+3|$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=-3$ წრფის მიმართ ⑤.

⑥ ამ ამოცანაში, ფაქტობრივად, განხილულია პარალელური გადატანა ვექტორით: $\vec{p}(2; 0)$; მაშასადამე, $A(5) \rightarrow A'(7)$; შექცეული ასახვით $M(x) \rightarrow M'(x-2)$.

⑦ საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოვსახავთ $x \rightarrow x^2+1$, $x \in [-1; 1]$ ფუნქციის გრაფიკს. გრაფიკიდან კარგად ჩანს, რომ ასახვა არ არის შექცევადი. შემოწმება ასე შეიძლება: Ox

ღერძის პარალელური წრფე $y=b$ ($1 \leq b \leq 2$) გრაფიკს ორ წერტილში კვეთს. ამ წერტილების აბსცისებს შეესაბამება ერთი რიცხვი b , ანუ b შეესაბამება ერთზე მეტ რიცხვს.

8 ამ ამოცანის საშუალებით შემოგვაქვს f და φ ასახვათა კომპოზიციის ცნება: $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$.

მაგალითად, მითითებული მაგალითის მიხედვით, $(\varphi \circ f)(2) = \varphi(f(2)) = \varphi(3) = 3$.

9 ასახვა შექცევადია; ვიპოვოთ შექცეული ასახვა:

$$f(x) = 2x - 3; y = 2x - 3,$$

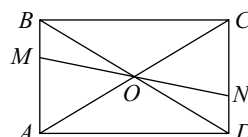
$$2x = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2};$$

მაშასადამე, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

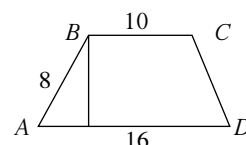
11 თუ N წერტილი M წერტილის სიმეტრიულია D -ს მიმართ, მაშინ $ON = OM$;

ამასთანავე, $AO = OC$, $\angle MOA = \angle CON$ (ვერტიკალური კუთხეები); ამიტომ $\triangle AMO = \triangle CNO$.



13 სიმეტრიის თვისების თანახმად,

$$AB = CD; 2AB = 38 - 26 = 12, AB = 6, CD = 6.$$



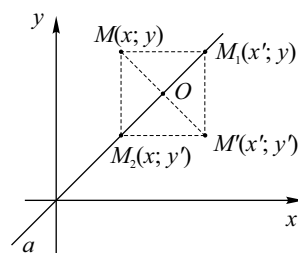
14 მოცემული ფორმულების მიხედვით, მოსწავლეები ააგებენ წერტილებს საკოორდინატო სიბრტყეზე და დარწმუნდებიან:

ა) გვაქვს სიმეტრია Ox ღერძის მიმართ;

ბ) გვაქვს სიმეტრია Oy ღერძის მიმართ;

გ) გვაქვს სიმეტრია სათავის მიმართ.

15 ამ ამოცანის ამოხსნის დეტალური მითითება იხილეთ სახელმძღვანელოში. შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი დებულების შებრუნებულიც ჭეშმარიტია. გთავაზობთ შესაბამის დამტკიცებას, რომელიც მაღალი მზაობის მოსწავლეებთან მუშაობისას შეიძლება გამოიყენოთ. ვთქვათ, S_a სიმეტრია a წრფის მიმართ და $S_a(M) = M'$; მაშინ, ცხადია, $MM_1M'M_2$ კვადრატია; M' წერტილის x' აბსცისა ემთხვევა M_1 -ის აბსცისას, რომელიც M -ის y ორდინატის ტოლია, მაშასადამე, $x' = y$; ანალოგიური მსჯელობით, $y' = x$.



შეიძლება ვისარგებლოთ წრფეთა მართობულობის პირობით; a წრფის მართობული წრფის დახრა არის (-1) ; მაშასადამე, $\frac{y'-y}{x'-x} = -1$; $y' - y = -(x' - x)$.

ამასთანავე, $\frac{x'+x}{2} = \frac{y'+y}{2}$

$$\begin{cases} y' - y = x - x' \\ y' + y = x' + x \end{cases} \quad \begin{cases} y' = x \\ x' = y. \end{cases}$$

17 თუ $x > 0$, $y = 1 - 1 = 0$

თუ $x < 0$, $y = -1 + 1 = 0$

სიმეტრიის ცენტრია $(0; 0)$ წერტილი, სიმეტრიის ღერძებია: Ox და Oy წრფეები.

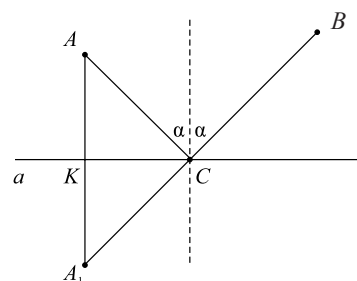
18) $O(a; b)$ არის AA' მონაკვეთის შუა წერტილი:

$$a = \frac{x+x'}{2}, \quad b = \frac{y+y'}{2};$$

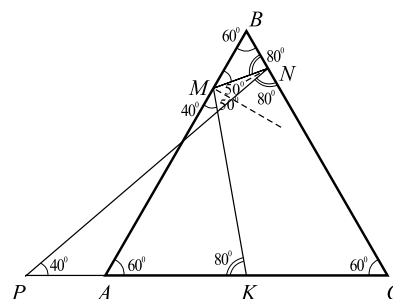
$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$$

19) ავადგოთ A -ს სიმეტრიული A_1 წერტილი OK წრფის მიმართ, A -ს სიმეტრიული A_2 წერტილი OP წრფის მიმართ. ცხადია, $A_1M = AM$, $A_2N = AN$, ამიტომ A_1MNA_2 გზა $AMNA$ გზის ტოლია. A_1MNA_2 იქნება უმცირესი, როცა M და N წერტილები მდებარეობს A_1A_2 მონაკვეთზე.

20) • დიახ, ნიშნავს. მართლაც, თუ A_1 წერტილი არის A წერტილის სიმეტრიული a წრფის მიმართ, მაშინ C წერტილი აღმოჩნდება AA_1 მონაკვეთის შუა მართობზე და ამიტომ $AC = A_1C$, $AC + CB = A_1C + CB$. თუ K წერტილი არის AA_1 მონაკვეთის a წრფესთან გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $\angle ACK = \angle A_1CK = 90^\circ - \alpha$. პირობის თანახმად $\alpha = \beta$. ამრიგად, $\angle A_1CB = 2(90^\circ - \alpha) + 2\alpha = 180^\circ$. მივიღეთ, რომ A_1 , C და B ერთი წრფის წერტილებია. A_1B მონაკვეთის სიგრძე, რაც ACB ტეხილის სიგრძის ტოლია, ნაკლებია AC_1B ტეხილის სიგრძეზე, სადაც C_1 არის a წრფის C -სგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი. ამიტომ AC_1B გზის გავლაზე მეტი დრო დაიხარჯება, ვიდრე ACB გზის გავლაზე.



• ა) პირობის მიხედვით ვადგენთ ნახაზს, რომელიც წარმოგიდგენს K წერტილიდან გამოსული სხივის ტრაექტორიას სამკუთხედის AB და AC გვერდებიდან არეკვლისას. ნახაზიდან ჩანს, რომ K -დან გამოსული სხივი არ დაუბრუნდება K წერტილს. ამ შედეგს სხვა გზითაც მივიღებთ: პირობის თანახმად, $AK = KC$. ვთქვათ $AC = a$, მაშინ $AK = \frac{a}{2}$.

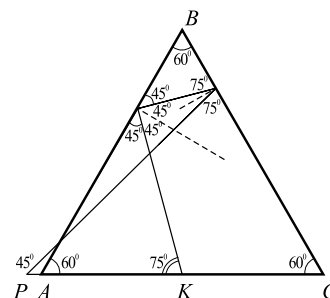


$\triangle AMK$ -ში $\angle AKM > \angle AMK$, ამიტომ $AM > AK$, $AM > \frac{a}{2}$.
 $MB = a - AM < \frac{a}{2}$.

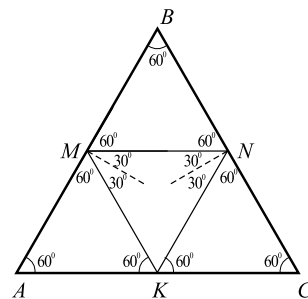
$\triangle MBN$ -ში $\angle BMN < \angle MNB$, ამიტომ $BN < MB$, $BN < \frac{a}{2}$. რადგან $NC = a - BN$, ამიტომ $NC > \frac{a}{2}$.

$\triangle PNC$ -ში $\angle PNC > \angle NPC$, ამიტომ $PC > NC$, $PC > \frac{a}{2}$. ამრიგად, P წერტილი არ ემთხვევა K წერტილს.

ბ) დავალება ამოიხსნება ა) დავალების ამოხსნის სრული ანალოგიით. წარმოგიდგენთ მხოლოდ შესაბამის ნახაზს.



გ) ამოცანის შესაბამისი ნახაზი დაგეხმარებათ თვალი მიადევნოთ სხივის გავრცელების ტრაექტორიას. სამკუთხედის გვერდებიდან არეკლილი სხივი დაუბრუნდება K წერტილს.



საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

10 ასახვა: $A(x) \rightarrow A_1(x^2)$ არ არის შექცევადი ასახვა; მაგალითად, $A(2) \rightarrow A_1(4)$; $A(-2) \rightarrow A_1(4)$.

12 სიმეტრია სათავის მიმართ.

13 პარალელური გადატანა ვექტორით: $\vec{p}(1; 3)$.

14 ვთქვათ: $f: x \rightarrow y$
 $f^{-1}(y)=x$
 $(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$; ე. ი. $(f \circ f^{-1})(y)=y$.

15 $f(x; y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

ცხადია, f ასახვა არ არის შექცევადი; წერტილებს, რომლებიც სათავიდან ტოლი მანძილებით არის დაშორებული ერთი და იგივე რიცხვი შეესაბამება.

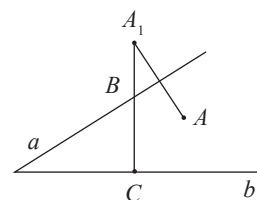
17 ა) $a=\frac{-3+5}{2}=1$; $b=\frac{5-3}{2}=1$; წერტილები სიმეტრიულია $(1; 1)$ წერტილის მიმართ, ბ) თუ $x>0$, $y=1$; თუ $x<0$, $y=-1$ გრაფიკს ეკუთვნის წერტილები: $(x; 1)$ და $(-x; -1)$ სიმეტრიის ცენტრია $(0; 0)$.

18 არხის a ნაპირი გამოვსახოთ წრფით და ავაგოთ ამ წრფის მიმართ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი. თუ O არის არხის რაიმე წერტილი, მაშინ $AO+OB=AO+OB_1$ და ეს მანძილი უმცირესია, როცა O წერტილი AB_1 მონაკვეთზეა. კოშკი უნდა აიგოს AB_1 მონაკვეთის a წრფესთან გადაკვეთის წერტილში.

19 $AA'B$ სამკუთხედისთვის გამოიყენეთ სამკუთხედის თვისება: ყოველი გვერდი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე.

20 მოსაწველემ უნდა შეძლოს ამოცანის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა სურათის სახით და მისი ჩამოყალიბება: როგორ შევარჩიოთ B და C წერტილები, შესაბამისად, a და b სხივებზე ისე, რომ $AB+BC$ უმოკლესი იყოს?

ავაგოთ A -ს სიმეტრიული A_1 წერტილი a სხივზე გამავალი წრფის მიმართ. მაშინ $AB+BC=A_1B+BC$ a სხივის ნებისმიერი B წერტილისთვის და ის უმცირესია, როცა A_1C არის b სხივზე გამავალ წრფეზე დაშვებული მართობი, B წერტილი კი — A_1C -სა და a სხივის გადაკვეთის წერტილი.



21 დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის გასწვრივ.

§8.3. მოზრუნება. მოზრუნებათა კომპოზიცია

წინარე ცოდნა: ასახვა, შექცევადი ასახვა, გეომეტრიული გარდაქმნა; ცენტრული სიმეტრია, სიმეტრია წრფის მიმართ; კუთხის გრადუსული ზომა.

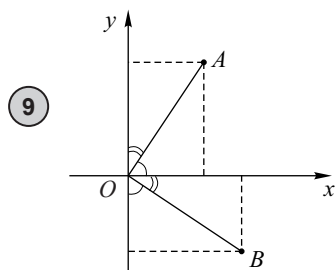
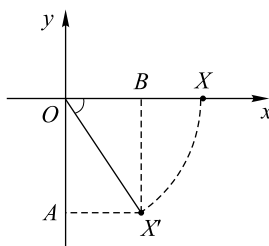
წინარე ცოდნის გააქტიურების შემდეგ შემოგვაქვს მოზრუნების კუთხის ცნება — დადებითი, ან უარყოფითი სიდიდე, რომელიც გრადუსებით გამოისახება. ერთი სრული ბრუნვა დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) 360° -ია, უარყოფითი მიმართულებით (-360°) -ია. შესაბამისად, შემოდის ახალი გეომეტრიული გარდაქმნა — მოზრუნება O წერტილის გარშემო α კუთხით: R_O^α . ჩანანერი: $R_O^\alpha(X)=X'$ ნიშნავს, რომ X' წერტილი მიიღება X წერტილისგან O წერტილის გარშემო α კუთხის მოზრუნების შედეგად, ამიტომ, $OX'=OX$ და მოზრუნების კუთხე არის α . ამასთანავე, ყოველი მოზრუნება β კუთხით, სადაც $\beta=\alpha+360^\circ n$ (n მთელია, $-180^\circ<\alpha\leq 180^\circ$) არის O წერტილის გარშემო α კუთხის მოზრუნება. შემდეგ ვაცხადებთ, რომ მოზრუნებისას ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება — მოზრუნება გადაადგილებაა. დასაბუთებას ერთ კერძო შემთხვევაში წარმოვადგენთ. განვიხილავთ მოზრუნებათა კომპოზიციას და აღვნიშნავთ: $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$.

მოზრუნების თვისებების შესახებ ცოდნის განმტკიცება „ტესტებითა“ და ამოცანების გამოყენებით მიმდინარეობს.

მითითებები:

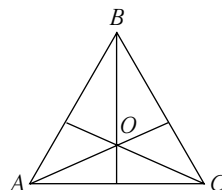
7 ე) $R_O^{-400^\circ} = R_O^{-400^\circ+360^\circ} = R_O^{-40^\circ}$

8 დ) $\alpha = -60^\circ$; $OX' = 1$; $\angle X'OX = 60^\circ$
 $AX' = \frac{1}{2}$, $BX' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $X' = (\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.



სურათიდან ჩანს, რომ $\angle AOB = 90^\circ$.
 ცხადია, $\alpha = -90^\circ$.

10 $AO = OB = OC$
 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$,
 ა) $R_O^{-120^\circ}$, ბ) $R_O^{120^\circ}$.

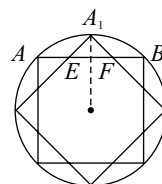


13 $OM = OM'$
 $KM = KM'$

O და K წერტილები M და M' წერტილებიდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული, ისინი MM' მონაკვეთის შუამართობს ეკუთვნის; $OK \perp MM'$.

14 სურათზე 8 პატარა სამკუთხედიდან, თითოეული ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია;

ვთქვათ, $A_1E = A_1F = AE = FB = x$, მაშინ
 $EF = x\sqrt{2}$, $AB = x + x + x\sqrt{2}$, $x(2 + \sqrt{2}) = 2$,



$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

საძიებელი ფართობი: $S = 4 \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 4 \cdot 2 \cdot (2 - \sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2(4 - 4\sqrt{2} + 2) = 8(\sqrt{2} - 1)$ (სმ²).

16 $R_o^\alpha \circ R_o^\alpha \circ R_o^\alpha = R_o^{3\alpha}$. რადგან კომპოზიცია იგივეური ასახვაა, $3\alpha=360^\circ$, $3\alpha=-360^\circ$ ან $3\alpha=0^\circ$. შესაბამისად, $\alpha=120^\circ$, $\alpha=-120^\circ$, $\alpha=0^\circ$.

$$\textcircled{17} \text{ თუ } \begin{array}{l} O=O', \quad R_o^\alpha \circ R_o^\beta = R_o^{\alpha+\beta}. \\ R_o^\beta \circ R_o^\alpha = R_o^{\beta+\alpha} \end{array} \quad \left| \quad \alpha+\beta=\beta+\alpha. \quad \right| \quad \text{მაშასადამე, } R_o^\alpha \circ R_o^\beta = R_o^\beta \circ R_o^\alpha.$$

საზოგადოდ, $R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} \neq R_{O'}^{\alpha} \circ R_{O'}^{\beta}$

მაგალითად, $\alpha=\beta=90^0$, M წერტილი OO' -ის შუა წერტილია; მაშინ

$$R_{\mathcal{O}}^{90^0} \circ R_{\mathcal{O}}^{90^0}(M) \neq R_{\mathcal{O}'}^{90^0} \circ R_{\mathcal{O}'}^{90^0}(M).$$

18 $R_{\rho}^{19^0, n} = R_{\rho}^{20^0}$. მითითებები სახელმძღვანელოს პასუხებშია მოცემული.

19 ცხადია, $A = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$; $C = (\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $D = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$; $B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

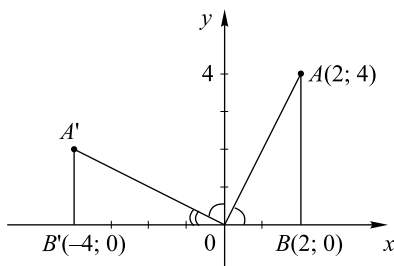
$ABCD$ კვადრატია, $S=(\sqrt{2})^2=2$.

$$R_{\mathcal{O}}^{90^0}(C)=D; \ R_{\mathcal{O}}^{90^0}(M(0;2))=M'(-2; \ 0).$$

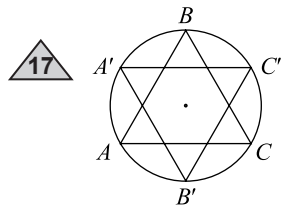
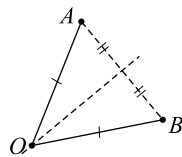
$$R_{\theta}^{90^{\circ}}(N(-1; 2))=(-2; 1).$$

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია, გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

15 $A' = (-4; 2);$
 $AA' = \sqrt{(2+4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$



16 A და B წერტილები ტოლი მანძილებით უნდა იყოს დაშორებული მობრუნების ნებისმიერი ცენტრიდან. ე. ი. ყველა ცენტრი ისევე, როგორც O წერტილი, AB -ს შუამართობს ეკუთვნის.



თითოეულის გვერდი 1 დმ-ია, ფართობი — $\frac{\sqrt{3}}{4}$ თანაკვეთის ფართობი — $\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (დმ²).

22 $R_O^{n \cdot 19^0} = R_O^{10^0 + 360^0 \cdot n}$
 $n \cdot 19^0 = 10^0 + 360^0 \cdot k$ ამრიგად, n არის 10-ის ჯერადი, $n = 10n_1$.
 $10 \cdot n_1 \cdot 19 = 10 + 360 \cdot k$
 $19n_1 = 1 + 36k$
 $n_1 = 19, k = 10, \quad n = 190, k = 10.$

24 ა) მიიღება ფუნქციის გრაფიკი: ა) $y=x$; ბ) $y=-x$.

§8.4. რადიანული ზომა

წინარე ცოდნა: კუთხის გრადუსული ზომა, მობრუნების კუთხე და მისი ზომა; წრენი-
რის სიგრძე; n° -იანი რკალის სიგრძე, მობრუნება O ცენტრის გარშემო α კუთხით. წი-
ნარე ცოდნის გააქტიურების შემდეგ შემოგვაქვს კუთხის რადიანული ზომა. ამ ზომის ერ-
თეულად აღებულია 1 რადიანი. ნაჩვენებია, რომ 1 რადიანი იმ კუთხის ზომაა, რომელიც
შეიძლება განვიხილოთ, როგორც წრენი-რის ცენტრული კუთხე, რომლის რკალის სიგრძე
ამ წრენი-რის რადიუსის სიგრძის ტოლია. ფორმალურად, ასეთი განხილვისას 1 რადიანის
ზომის კუთხის სიდიდე, თითქოს დამოკიდებულია წრენი-რის რადიუსსა და რკალის სიდი-
დეზე, თუმცა ნაჩვენებია, რომ $1 \text{ რად} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$.

მაშასადამე, სრული კუთხე შეესაბამება $\frac{2\pi R}{R}$ რიცხვს — 2π რადიანს, 180° შეესაბამება
 π რიცხვს, π რადიანს.

მაშასადამე, α რადიანის შესაბამისი რკალის სიგრძე არის $R\alpha$ (R რადიუსის სიგრძეს
გამოსახავს).

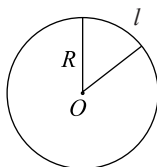
ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლეები ადვილად პოულობენ გრადუსული ზომის შე-
საბამის რადიანულ ზომას; აქ შეიძლება ვისარგებლოთ პროპორციით და პროპორციის
თვისებით; ამასთანავე, 180° -ის შესაბამისი რადიანული ზომა არის π ; შეიძლება ვისარგე-
ბლოთ „ერთეულზე“ დაყვანის წესით: 1 რადიანის შესაბამისი გრადუსული ზომა არის
 $\frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}$; 1° -ის შესაბამისი რადიანული ზომა არის $\frac{\pi}{180}$; 30° -ის — $30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$; 60° -ის —
 $60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$; 45° -ის — $45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$.

10, 11 შეიძლება ვისარგებლოთ პროპორციით:

$$\left. \begin{array}{l} \pi R^2 - 2\pi \\ S - \frac{\pi}{5} \end{array} \right| S = \frac{\pi}{10} \cdot R^2.$$

შეიძლება წინასწარ გამოვიყვანოთ ფორმულები: α რადიანის შესაბამისი რკალის
სიგრძე — $R\alpha$, სექტორის ფართობი: — $\frac{1}{2} R^2 \alpha$.

12
$$\begin{aligned} P &= 2R + l, \\ P &= 2R + R\alpha \\ R\alpha &= P - 2R \\ \alpha &= \frac{P - 2R}{R} \end{aligned}$$



$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha = \frac{1}{2} R P - R^2$$

S უმცირესია, როცა $R = \frac{1}{2} P = \frac{P}{4}$.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალო-
გიურია. გთავაზობთ მითითებებს ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

6 წუთების ისარი ყოველ საათში „გაივლის“ 2π რადიანის კუთხეს: $V_1 = 2\pi$ რად./სთ;
საათების ისრის სიჩქარე 12-ჯერ ნაკლებია $V_2 = \frac{\pi}{6}$ რად./სთ.

$$\triangle 10 \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad S = \frac{1}{2} R^2 \alpha = 12,5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{25}{12} \pi.$$

$$\triangle 11 \quad \text{ნახევარწრის რადიუსია } R = \frac{b}{2} = \frac{P}{4+\pi}.$$

$$P = 2a + b + l = 2a + b + \frac{\pi b}{2}, \quad \text{საიდანაც } a = \frac{P - b - \frac{\pi b}{2}}{2}.$$

$$S = ab + \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{b^2}{4};$$

$$S = \frac{P}{2} b - b^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{უდიდესია, როცა } b = \frac{2P}{4+\pi}.$$

§8.5. მსგავსი ფიგურები

ახალი სამიზნე ცნების განხილვას მსგავსი ფიგურების ცხოვრებისეულ კონტექსტთან დაკავშირებული პრაქტიკული მაგალითის განხილვით ვიწყებთ. სამკუთხედების შემთხვევაში მსგავსების ცნება, მსგავსების ნიშნები გავლილ მასალად შეიძლება ჩავთვალოთ. ცნების განზოგადებას მივყავართ ნებისმიერ ფიგურათა მსგავსებასთან.

ასახვების ენაზე განვსაზღვრავთ ფიგურათა ტოლობის ცნებასაც. მრავალკუთხედების (კერძოდ, სამკუთხედების) შემთხვევაში ტოლობას კუთხეებისა და გვერდების ზომათა ტოლობას ვუკავშირებდით. ფიგურათა ტოლობაც და მსგავსებაც შექცევად ასახვებს დაუკავშირეთ — ტოლობის შემთხვევაში — გადაადგილებას, მსგავსების შემთხვევაში — ისეთ ასახვას, როცა ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება.

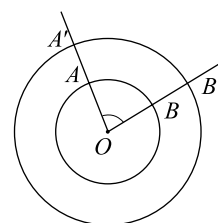
მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად:

სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების გამოყენებით, მოსწავლეები ადვილად პოულობენ პასუხებს **1-3** „ტესტებზე“.

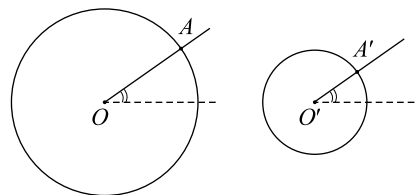
4 ა) სურათიდან კარგად ჩანს, რომ ვიყენებთ ასახვას, რომლის დროს A -ს შეესაბამება A' , B -ს — B' (შექცეული ასახვით — A' -ს — A ; B' -ს — B).

მაშინ, ცხადია, ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}.$$



ბ) ამ შემთხვევაში ყოველ A წერტილს შევუსაბამოთ ისეთი A' წერტილი, რომელიც მიიღება OA სხივის პარალელური $O'A'$ სხივის მეორე წერტილთან გადაკვეთით. ამ შემთხვევაშიც ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იგივე რიცხვჯერ იცვლება: $k = \frac{OA'}{OA}$.



6 ა) პარალელური გადატანით, ვექტორით $\vec{O'O}$, $O'A'B'C'$ აისახება მის ტოლ კვადრატზე, შემდეგ R_0 ° მობრუნებით მიიღება კვადრატი $OA''B''C''$.

შემდეგ განვიხილავთ ასახვას $k = \frac{b}{a}$ კოეფიციენტით ($b = O'C'$, $a = OA$), რომელიც ჩაიწერება შემდეგი სახით: $M(x_1; y_1) \rightarrow M_1(kx_1; ky_1)$. განვიხილოთ მეორე წერტილი: $N(x_2; y_2)$; ამასთანავე,

$$N(x_2; y_2) \rightarrow N_1(kx_2; ky_2)$$

$$M_1N_1 = \sqrt{(k(x_2 - x_1))^2 + (k(y_2 - y_1))^2} = k\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = kMN.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ორი კვადრატი მსგავსია და მსგავსების კოეფიციენტი კვადრატების გვერდების სიგრძეების შეფარდებაა.

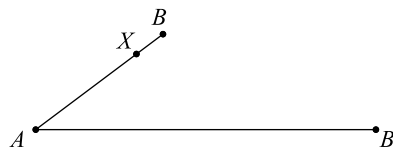
1 $k = \frac{1}{5}$; $A'B'C'$ სამკუთხედის უდიდესი გვერდია ABC სამკუთხედის უდიდესი გვერდის შესაბამისი გვერდი;

$$\frac{1}{5} \cdot 8 = 1,6 \text{ (სმ).}$$

4 ნებისმიერი ორი ტოლი ფიგურა მსგავსია, $k=1$. ნებისმიერი ორი მსგავსი ფიგურა არ არის ტოლი (თუ $k \neq 1$).

6 X წერტილს შევუსაბამოთ ისეთი X' წერტილი, რომლისთვისაც გვაქვს: $AX' = 3AX$ (აქ $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$).

გავავლოთ BB_1 -ის პარალელური წრფე X წერტილზე, AB -სთან გადაკვეთის წერტილი იქნება X' .



ბ) ვთქვათ, $A \rightarrow B_1$, $B \rightarrow A_1$; მაშინ $X \rightarrow X'$, ამასთანავე, $BX' = 3AX$.

7 ასახვა შექცევადია: თუ $X(x) \in b$,

$$X'(\frac{1}{k}x) \in a;$$

$$X(x) \rightarrow X'(\frac{1}{k}x).$$

a წრფეზე: $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$

b წრფეზე: $Q_1Q_2 = |kx_2 - kx_1| = |k| \cdot |x_2 - x_1|$, $k > 0$.

$$Q_1Q_2 = k \cdot |x_2 - x_1|.$$

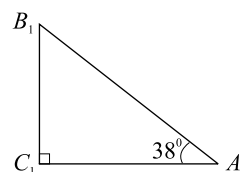
b წრფე მსგავსია a წრფის მსგავსების k კოეფიციენტით.

k -ს ნაცვლად შეიძლება ნებისმიერი დადებითი რიცხვის განხილვა.

8 ვიყენებთ ტრანსპორტირს და ავაგებთ $C_1A_1B_1$ კუთხეს. $\angle C_1A_1B_1 = 38^\circ$; შევარჩევთ C_1 წერტილს ისე, რომ $A_1C_1 = 4$ სმ.

$$\text{მაშინ } k = \frac{20000}{4} = 5000.$$

გავზომავთ B_1C_1 -ს; მაშინ $BC = 5000 \cdot B_1C_1$.



§8.6. ჰომოთეტია

ვაგრძელებთ სამიზნე ცნების — გეომეტრიული გარდაქმნების — კერძო შემთხვევების განხილვას. მათი თვისებების შესწავლა გვეხმარება ძირითადი სამიზნე ცნების გააზრებაში. წინარე ცოდნა, ცხადია, გეომეტრიული გარდაქმნის ცნების აღწერასა და უკვე განხილულ კერძო შემთხვევებს უკავშირდება.

ჰომოთეტიის განსაზღვრებას წინ უძღვის მოსამზადებელი აქტივობა, რომელსაც მივყავართ ახალ გეომეტრიულ გარდაქმნამდე. წარმოდგენილია ჰომოთეტიის პრაქტიკული განხორციელების მაგალითები, რომელიც ხელს უწყობს ცნების გააზრებას. ვექტორული მეთოდის გამოყენება აადვილებს ჰომოთეტიის ცნების შინაარსის მოკლედ და გასაგებად ჩამოყალიბებას. კოორდინატებით გამოსახვისას განხილულია ორი შემთხვევა: 1) ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა; 2) ცენტრი არ ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს. ორივე შემთხვევაში მიღებულია ჰომოთეტიის კოორდინატებით წარმოდგენის ფორმულები.

აღწერილია ჰომოთეტიის თვისებები. მნიშვნელოვანია შემდეგი თვისება: ყოველი წრფე, რომელიც ჰომოთეტიის ცენტრზე გადის, თავის თავზე აისახება.

თვისებები შესაბამისი სურათებით არის აღწერილი. მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაი-აზრონ, რომ ჰომოთეტია მსგავსების კერძო შემთხვევაა — თუ F' ფიგურა ჰომოთეტიურია F ფიგურის k კოეფიციენტით, მაშინ F' ფიგურა მსგავსია F ფიგურის $|k|$ კოეფიციენტით — ჰომოთეტიისას ორ წერტილს შორის მანძილი $|k|$ -ჯერ იცვლება. „ტესტებითა“ და ამო-ცანებით მიმდინარეობს ცოდნის განმტკიცება ჰომოთეტიის ცნებისა და ჰომოთეტიის თვისებების შესახებ.

მოითხოვება ჰომოთეტიის k კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობის კარგად გააზ-რება, მაგალითად, $k=-1$ შეესაბამება ცენტრულ სიმეტრიას; ჰომოთეტია შექცევადი ასახვაა, შექცეულის კოეფიციენტი მოცემული ჰომოთეტიის კოეფიციენტის შებრუნე-ბულია; ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე ჰომოთეტიის „უძრავი“ გეომეტ-რიული ფიგურაა (თავის თავზე აისახება), ნებისმიერი კოეფიციენტის დროს თუ სამკუთ-ხედები ჰომოთეტიურია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

⑩ ჰომოთეტიის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა; ამიტომ, თუ ამ ჰომოთეტიით $A(x; y)$ წერტილი $A'(x'; y')$ წერტილზე აისახება, მაშინ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი შეიძლება ასე გამოვთვალოთ: $k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = 2$.

⑫ AB მონაკვეთის შუა წერტილია — $C(1; 2)$. მისი ჰომოთეტიური $k=0,2$ კოეფიციენტით არის წერტილი: $C'(0,2; 0,4)$.

⑬ ვთქვათ, ცენტრი კოორდინატთა სათავეა: H_1 ჰომოთეტიით $(x; y)$ წერტილი აისახება $(k_1x; k_1y)$ წერტილზე. H_2 ჰომოთეტიით $(k_1x; k_1y)$ აისახება $(k_2k_1x; k_2k_1y)$ წერტილზე. ე. ი. $H_2 \circ H_1$ ჰომოთეტიაა k_1k_2 კოეფიციენტით. ეს მსჯელობა შეიძლება ჩავთვალოთ დებულების დასაბუთებად, რადგან სიბრტყეზე შეგვიძლია კოორდინატთა სისტემის ისე შემოღება, რომ სათავე ჰომოთეტიის ცენტრს დაემთხვეს. თუმცა, ანალოგიური მსჯელობის ჩატარება შეიძლება იმ შემთხვევაშიც, როცა ცენტრი $O(a; b)$ წერტილია.

ამ შემთხვევაში დასაბუთების სქემა ასეთია:

$$(x_1; y_1) \rightarrow (k_1x_1 + a(1-k_1); k_1y_1 + b(1-k_1)) \rightarrow (k_2(k_1x_1 + a - ak_1) + a(1-k_2); k_2(k_1y_1 + b - bk_1) + b(1-k_2)) = (k_1k_2x_1 + ak_2 - ak_1k_2 + a - ak_2;$$

$$k_1 k_2 y_1 + b k_2 - k_1 k_2 b + b - b k_2 = (k_1 k_2 x_1 + a(1 - k_1 k_2); k_1 k_2 y_1 + b(1 - k_1 k_2)).$$

მივიღეთ ჰომოთეტია კოეფიციენტით $k_1 k_2$.

დებულების დასაბუთება შეიძლება ვექტორული ანალიზის გამოყენებითაც:

თუ H_1 -ით — $M_1 \rightarrow M_2$, H_2 -ით — $M_2 \rightarrow M_3$, მაშინ

$$\vec{OM}_2 = k_1 \vec{OM}_1,$$

$$\vec{OM}_3 = k_2 \vec{OM}_2 = k_2 k_1 \vec{OM}_1.$$

14 თუ ორი ფიგურა მსგავსია, მაშინ ისინი ჰომოთეტიურია. ეს დებულება მცდარია. შეიძლება მოვიყვანოთ ასეთი კონტრმაგალითი; ვთქვათ, $\Delta A_1 B_1 C_1$ მიიღება ΔABC -სგან A წერტილის გარშემო 20° -იანი კუთხით მობრუნებისას.

მობრუნება გადაადგილებაა, მსგავსების კერძო შემთხვევა ($k=1$); მაშასადამე, $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$. მაგრამ $\Delta A_1 B_1 C_1$ არ არის ჰომოთეტიური ΔABC -სი, რადგან AB გვერდი აისახა $A_1 B_1$ -ზე, ხოლო $A_1 B_1$ არ არის პარალელური AB წრფის და არ ემთხვევა AB -ს. რაც ეწინააღმდეგება ჰომოთეტიის ერთ-ერთ თვისებას (თვისება II).

15 ჰომოთეტიის O ცენტრად შეიძლება მივიღოთ AA_1 და BB_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილი. ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრია აღნიშნული O წერტილი და $k=2$, $ABCD$ აისახება $A_1 B_1 C_1 D_1$ -ზე. ე. ი.

$$\Delta OA_1 B_1 \sim \Delta OAB,$$

$$\frac{A_1 O}{AO} = \frac{B_1 O}{BO} = \frac{A_1 B_1}{AB} = 2.$$

რადგან $A_1 D_1 \parallel AD$ და $\frac{A_1 D_1}{AD} = 2$, ამიტომ D_1 ეკუთვნის DO წრფეს და $\Delta A_1 D_1 O \sim \Delta ADO$, ამასთანავე,

$$\frac{D_1 O}{DO} = \frac{A_1 O}{AO} = 2, \text{ ანალოგიურად, } \frac{C_1 O}{CO} = 2.$$

16 სურათზე შერჩეულია ჰომოთეტიის O ცენტრი. ვთქვათ, $k = \frac{1}{5}$, $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, მაშინ

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{1}{5}, \quad \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{5}.$$

ცხადია, $AB = 5 \cdot A'B'$ და $A'B'$ -ის პოვნით, ვიპოვით AB -ს.

17 m წრფე გადის A და B წერტილებზე; n წრფე m წრფის პარალელურია; n კვეთს a და b წრფეებს, შესაბამისად, A' და B' წერტილებზე. გავავლებთ წრფეებს A' და B' წერტილებზე, რომლებიც, შესაბამისად, პარალელურია AM და BM წრფეების. მათი გადაკვეთის წერტილია M' .

თუ წარმოვიდგენთ, რომ გვაქვს ჰომოთეტია, რომლის ცენტრი „მიუწვდომელი“ წერტილია და A' აისახება A -ზე, მაშინ იმავე ჰომოთეტიით M' აისახება M -ზე. MM' წრფე გაივლის მიუწვდომელ წერტილზე.

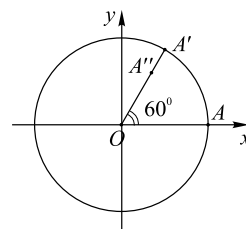
$$\textcircled{18} \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} x &= \frac{x'}{3} \\ y &= \frac{y'}{3} \end{aligned} \right.$$

$$\text{გ) } y = 2x + 2, \quad \frac{y'}{3} = 2 \frac{x'}{3} + 2;$$

მიიღება წრფე: $y = 2x + 6$.

19) $A \rightarrow A' \rightarrow A''$

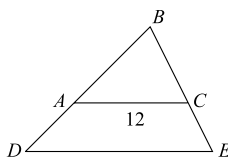
ცხადია, თუ $A'=(x'; y')$, მაშინ $x'=2$, $y'=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$;
თუ $A''=(x''; y'')$, მაშინ $x''=0,8 \cdot 2=1,6$; $y''=0,8 \cdot 2\sqrt{3}=1,6\sqrt{3}$.



20) $BC=0,8 \cdot 12=9,6$

$AB=0,8 \cdot 8=6,4$

$P=9,6+6,4+12=28$ (სმ)



9) $k=\frac{x}{4}=\frac{11}{-5,5}$, $k=-2$.

$x=-\frac{44}{5,5}=-\frac{440}{55}=-8$.

10) მოცემული წრეწირის რადიუსი არის 2; მისი ჰომოთეტიურის — 5; რგოლის ფართობი: $S=\pi(25-4)=21\pi$.

15) არ შეიძლება — ყოველი წრფე აისახება თავის თავზე ან პარალელურ წრფეზე.

16)
$$\begin{cases} x'=3x \\ y'=3y \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} x &= \frac{x'}{3} \\ y &= \frac{y'}{3} \end{aligned} \right.$$

$\frac{y}{3}=-2 \cdot \frac{x}{3}+1$;

$y=-2x+3$.

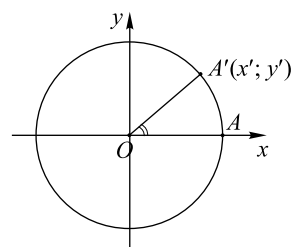
17) შეიძლება ეს ასახვა განვიხილოთ, როგორც ორი ჰომოთეტიის კომპოზიცია; $k_1=k$; $k_2=-1$; შედეგი არის ჰომოთეტია კოეფიციენტით $(-k)$.

19) ცხადია, $y'=4$, $x'=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$;

$A''(x''; y'')$ მიიღება $A'(x'; y')$ ნერტილისგან $H_o^{0,6}$ ჰომოთეტიით;

მაშინ $x''=0,6 \cdot 4\sqrt{3}=2,4\sqrt{3}$;

$y''=0,6 \cdot 4=2,4$.



§8.7. მსგავსების ასახვა. სამკუთხედის მსგავსების ნიშნები

მსგავსების ასახვის ახსნა და სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების ახლებური წარმოდგენა ხელს უწყობს ძირითადი სამიზნე ცნებისა და მისი თვისებების გააზრებას.

ვიწყებთ გეომეტრიული გარდაქმნების გახსენებითა და სხვადასხვა კერძო შემთხვევის გახსენებით. ვიმეორებთ ჰომოთეტიას, ჰომოთეტიის თვისებებს. პროცესი მოსწავლეთა ჩართულობითა და აქტიური მონაწილეობით მიმდინარეობს.

მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ ჰომოთეტიისა და გადაადგილების კომპოზიციისა და ძირითადი თვისების გააზრება — ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება. კლასში ინტერაქტიულად განიხილეთ მსგავსების ასახვის განსაზღვრება და ძირითადი თვისება. მოსწავლეებს შევახსენებთ სამკუთხედების მსგავსების აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომელიც მსგავსების განსაზღვრებად იყო წარმოდგენილი (ყოველი განსაზღვრება შეიცავს აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომელსაც განსასაზღვრავი ცნება აკმაყოფილებს). მოსწავლეები იხსენებენ იმ საკმარის პირობებს (მსგავსების ნიშნებს), რომლებიც უზრუნველყოფს ზემოთ წარმოდგენილ პირობებს. მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ მსგავსების ხაზის განვითარება და ერთ-ერთი საკმარისი ნიშნის დასაბუთება ჰომოთეტიისა და გადაადგილების კომპოზიციის გამოყენებით.

მოსწავლეთა მოტივაციის გაზრდის მიზნით, პრაქტიკულ ამოცანასაც განვიხილავთ. ეს ამოცანა მსგავსების ნიშანს უკავშირდება — მდინარის ერთი ნაპირიდან მეორე ნაპირზე მდებარე ორ ობიექტს შორის მანძილის განსაზღვრა კუთხისა და მანძილის მზომი ხელსაწყოების გამოყენებით ისე, რომ არ გადავდივართ მეორე ნაპირზე. მაღალი მზაობის მოსწავლეებს შეიძლება ვთხოვოთ II და III ნიშნების დასაბუთება I ნიშნის დასაბუთების ანალოგიურად და შემდეგ გაკვეთილზე ამ დასაბუთების წარმოდგენა.

ამოცანებისა და „ტესტების“ გამოყენებით, მოსწავლეები განიმტკიცებენ ცოდნას მსგავსების ასახვისა და სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების შესახებ.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

9 მოსწავლეებმა უნდა აღმოაჩინონ, რომ $\triangle ACB \sim \triangle CDB$. გავახსენოთ მოსწავლეებს, შეთანხმება — სამკუთხედებს ჩავენერთ ისე, რომ ჩანაწერებში ტოლი კუთხეების წვეროების თანამიმდევრობა ერთნაირი იყოს ($\angle A = \angle DCB$; $\angle ACB = \angle CDB$). მაშინ შეფარდებებიც ადვილად დაინერება:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD} = \frac{AB}{BC};$$

$$\frac{x}{18} = \frac{32}{x}; \quad x^2 = 18 \cdot 32,$$

$$x = 24 \text{ (სმ)}.$$

11–12 ამოცანებს კლასში ერთობლივი მუშაობით განვიხილავთ; შედეგებს ვიყენებთ სხვა ამოცანების ამოხსნისას.

14 $\triangle KBD \sim \triangle EFD$;

$$\frac{a}{b} = \frac{EF}{y}; \quad EF = \frac{ay}{b}, \text{ ნაძვის სიმაღლე — } h + EF.$$

15 სურათზე მსგავსი სამკუთხედების ორი წყვილია გამოსახული. შესაბამისად, ვწერთ პროპორციებს:

$$\frac{b}{a-h} = \frac{z}{x-h}; \quad \frac{c}{a-h} = \frac{z+y}{x-h}, \text{ აქედან გვაქვს:}$$

$$\frac{b}{z} = \frac{a-h}{x-h}, \quad \frac{c}{z+y} = \frac{a-h}{x-h}, \quad z = \frac{by}{c-b}, \quad x = \frac{y(a-h)}{c-b} + h.$$

შენიშვნა: ხშირად, მსგავსი სამკუთხედების გვერდების პროპორციას ასე წარმოვადგენთ:

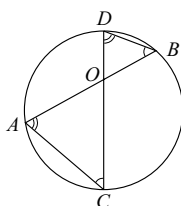
თუ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, მაშინ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

ეს პროპორციები მიღებულია პროპორციებიდან:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

16-17 ამოცანებში, სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების გამოყენებით, წინასწარ შეიძლება დავასაბუთოთ ურთიერთგადამკვეთი ქორდების თვისებები, მხებისა და მკვეთის თვისებები.



$$\triangle DOB \sim \triangle AOC;$$

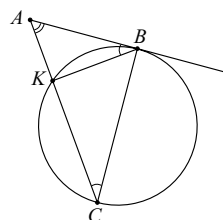
$$\frac{DO}{AO} = \frac{OB}{OC},$$

$$DO \cdot OC = AO \cdot OB.$$

$$\triangle ABK \sim \triangle ACB;$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB},$$

$$AB^2 = AC \cdot AK.$$



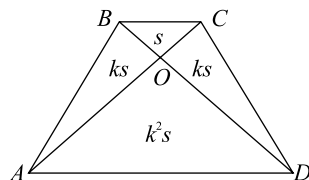
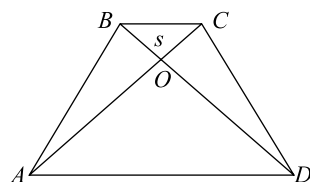
ვთხოვთ მოსწავლეებს, ჩამოაყალიბონ დასაბუთებული თვისებები.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია, გთავაზობთ მითითებებს რამდენიმე ამოცანის ამოსახსნელად.

7 ერთი შემთხვევაა „საეჭვო“, როცა ერთ-ერთის წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის; მაგალითად, სამკუთხედი, რომლის კუთხეების ზომებია 80° , 50° , 50° , არ არის მსგავსი სამკუთხედის, რომლის კუთხეების ზომებია 80° , 80° , 20° . მოსწავლეებმა უნდა წარმოადგინონ ამოცანის პირობის შესაბამისი შესაძლო შემთხვევები და განავითარონ მსჯელობის ხაზი.

15 ეს ამოცანა შეიძლება დანვრილებით განვიხილოთ კლასში და „მივიდეთ“ შემდეგ სურათამდე:

ვთქვათ, $\frac{AD}{BC} = k$, თუ $S_{BOC} = s$, მაშინ მსგავსების შედეგია ფორმულა: $S_{AOD} = k^2 s$;



რადგან $AO:OC = k$, AOB და BOC სამკუთხედებს B წერტილიდან დაშვებული საერთო სიმაღლე აქვს, ამიტომ $S_{AOB} = ks$, ანალოგიურად, $S_{COD} = ks$. მაშასადამე, გვაქვს $S_{ABCD} = s + 2ks + k^2s = s(1+k)^2$.

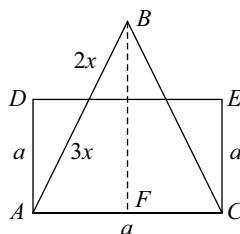
22* ვთქვათ, $BF=h$. მაშინ გვაქვს:

$$\frac{2x}{5x} = \frac{h-a}{h}$$

$$2h = 5h - 5a$$

$$h = \frac{5}{3}a$$

$$S = \frac{5}{6}a^2.$$



§8.8. ტრიგონომეტრიული თანაზარდობები მართკუთხა სამკუთხედში

ტრიგონომეტრიის საკითხების შესახებ ცოდნის გამეორება და გაღრმავება უკავშირდება წინარე ცოდნას: პითაგორას თეორემა, სამკუთხედების მსგავსება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების გამეორების შემდეგ გადავდივართ მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების ჩამოყალიბებაზე. ეს მომენტი არსებითია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემოტანისას. მოსწავლეები პასუხობენ ჩვენს შეკითხვებს. მაგალითად,

— მსგავსია თუ არა ორი მართკუთხა სამკუთხედი, თუ ცნობილია, რომ მათი თითო მახვილი კუთხე ტოლია?

— სამკუთხედების მსგავსების რომელი ნიშნის შედეგია მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება თითო მახვილი კუთხის ტოლობით?

— კიდევ რა ნიშნები შეიძლება ჩამოაყალიბოთ მართკუთხა სამკუთხედების შემთხვევაში?

თუ მართკუთხა სამკუთხედების თითო კათეტი და ჰიპოტენუზები პროპორციულია, მაშინ შეიძლება, პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ვაჩვენოთ, რომ კათეტები პროპორციულია; თუ $a_1=ka$; $c_1=kc$, $c^2=a^2+b^2$, მაშინ $(kc)^2=(ka)^2+b_1^2$; $b_1^2=k^2(c^2-a^2)=k^2b^2$, მაშასადამე, $b_1=kb$.

მოსწავლეებმა ტექსტში წარმოდგენილი დებულების დამტკიცების შემდეგ, კარგად უნდა გაიაზრონ — რატომ უნოდებენ სინუსს, კოსინუსს, ტანგენსს და კოტანგენსს მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

საფუძველი ეყრება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემდგომ შესწავლას — შემოგვაქვს ერთეულრადიუსიანი წრეწირი და მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს წარმოვადგენთ წრეწირზე „მოძრავი“ M წერტილის კოორდინატებით, იმ $M(x; y)$ წერტილის, რომლის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი Ox ღერძთან α კუთხეს ადგენს.

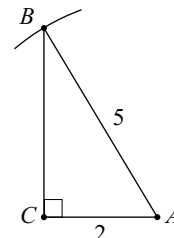
საფუძველი ეყრება რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლას, რომელიც, ჩვენი აზრით, მე-11 კლასში უნდა ჩატარდეს. საფუძველი ეყრება შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლასაც — მახვილი კუთხის შემთხვევაში გვაქვს შექცევადი ასახვა, შესაბამისად, შემოგვაქვს შექცეული ფუნქციები — $\arcsin a$, $\arccos a$ ($0 < a < 1$), $\operatorname{arctg} b$, $\operatorname{arcctg} b$ ($b > 0$), მახვილი კუთხეები, რომელთა სინუსი, კოსინუსი, შესაბამისად, არის a , ტანგენსი და კოტანგენსი კი, შესაბამისად, — b .

ამ მასალის განხილვის შემდეგ მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ ①-③ „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა; ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის დამოკიდებულების განხილვა დაეხმარება მათ ④ და ⑤ „ტესტების“ „ამოხსნაში“.

რადიანული ზომის გამოყენებას მოითხოვს ⑥-⑧ ამოცანების ამოხსნა.

⑨ ა) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$. შეიძლება ავსაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთი კათეტი 2 სმ-ია, ჰიპოტენუზა — 5 სმ.

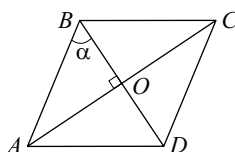
$CA=2$; C -ზე გავავლებთ CA -ს მართობულ წრფეს, A წერტილიდან შემოვხაზავთ 5-ის ტოლი რადიუსით წრეწირს, წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ B -თი, მაშინ $\cos A = \frac{2}{5}$, $BC = \sqrt{25-4}$ და $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$.



მართკუთხა სამკუთხედის ამოხსნის ცოდნა დაეხმარება მოსწავლეებს ⑪-⑬ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაში. ისინი იყენებენ ცხრილს, რომელიც სახელმძღვანელოს ბოლოშია მოცემული.

⑭-⑱ ამოცანები მოითხოვს შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცოდნას. მაგალითად, განვიხილოთ ⑰ ამოცანა.

$$\begin{aligned} \text{მოცემულია: } \alpha &= \arctg \frac{8}{5} \\ AC &= 6,4 \text{ დმ} \\ S_{ABCD} &= ? \end{aligned}$$



რადგან $\alpha = \arctg \frac{8}{5}$, ამიტომ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{8}{5}, \quad AO = 3,2, \\ \frac{3,2}{BO} &= \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{3,2}{BO} = \frac{8}{5} \\ BO &= 2. \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6,4 \cdot 4 = 12,8 \text{ (დმ}^2\text{)}.$$

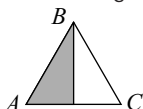
საყურადღებოა ⑫ ამოცანა: სამკუთხედის ფართობი გამოსახულია ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხის სინუსით. სურათის მიხედვით, გვაქვს $\sin \alpha = \frac{BD}{AB}$, $BD = AB \sin \alpha$, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha$.

საშინაო დავალების ამოცანები კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია.

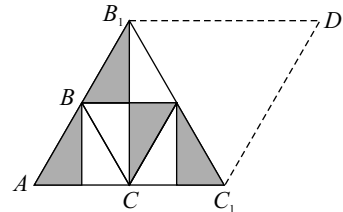
კომპლექსური დავალება. გეომეტრიული გარდაქმნების სხვადასხვა გამოყენება

გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების შესწავლის შემდეგ, სხვადასხვა ბეჭდვითი და ელექტრონული რესურსის გამოყენებით, მოსწავლეები შეიძლება დავალების შესრულებას; მაგალითად, წრფის მიმართ სიმეტრიის გამოყენებით, ოპტიმალური მარშრუტის პოვნის ამოცანა მე-9 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოებშიც განიხილებოდა. გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენება უძველესი დროიდან უკავშირდება ორნამენტული

კომპოზიციების შექმნას. მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს შესაბამისი მოხატულობები, როცა აღნიშნული კომპოზიციების შექმნა სიმეტრიების და პარალელური გადატანის თვისებების გამოყენებას უკავშირდება; როცა აღნიშნული კომპოზიციებით სიბრტყე იფარება, მაშინ საჭირო ხდება აღნიშნული გარდაქმნების გამოყენება. მოსწავლემ შეიძლება შეძლოს ხსენებული „მათემატიკური ხელოვნების ნიმუშების მოძიება ქართული ხუროთმოძღვრების ძეგლებში, მხატვრულ ნაქარგებში. მოსწავლეებმა შეიძლება მოიძიონ ცნობილი ჰოლანდიელი მათემატიკოსისა და არქიტექტორის მორის ეშერის შემოქმედების ნიმუშები, რომლის მიერ შექმნილ ორნამენტებში გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებები გამოიყენება.

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება თავად გადაწყვიტოს ორნამენტის შექმნა — შეიძლება შეიღებოს ტოლგვერდა სამკუთხედის ნახევარი —  შემდეგ ცენტრული და ღერძული სიმეტრიებით შეიქმნას უფრო დიდი ტოლგვერდა სამკუთხედი.

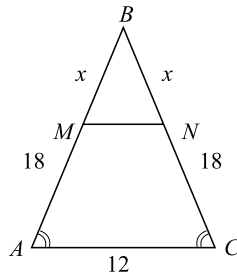
მაგალითად, სურათზე გამოყენებულია ცენტრული და ღერძული სიმეტრიები — მიღებულია AB_1C_1 ტოლგვერდა სამკუთხედი, შემდეგ — ღერძული სიმეტრია B_1C_1 -ის მიმართ, მივიღეთ რომბი, ღერძული სიმეტრიებით AB_1 და B_1D -ს მიმართ, მიიღება ექვსკუთხედი და ა. შ.



მითითებები „მოისაზრეს“ ამოცანების ამოსახსნელად.

1 ვიყენებთ სამკუთხედების მსგავსებას — $\frac{r}{28-r} = \frac{21}{28}$; აქედან, $r=12$ (სმ).

2 $\frac{x}{18} = \frac{MN}{12}$
 $MN = \frac{2}{3}x$
 $\frac{2x}{3} + 2(18-x) + 12 = 40$
 აქედან, $x=6$,
 $MN=4$ (სმ).



3 მოცემულია: l_a გადის A წვეროზე და გვაქვს: $l_a \parallel PA_1$, $l_b \parallel OB_1$, $l_0 \parallel PC$, პირობის თანახმად,

$H_M^{-\frac{1}{2}}(A_1) = A_1$, $H_M^{-\frac{1}{2}}(B_1) = B_1$, $H_M^{-\frac{1}{2}}(C_1) = C_1$, $H_M^{-2}(A_1P) = l_a$,
 რადგან

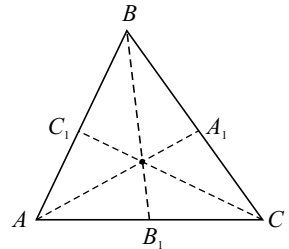
$$H_M^{-2}(A_1) = A \text{ და } H_M^{-2}(A_1P) \parallel PA_1.$$

მაშინ,

$$H_M^{(-2)}(B_1P) = l_b, \quad H_M^{(-2)}(C_1P) = l_c.$$

ამიტომ l_a , l_b და l_c გაივლის იმ P_1 წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$H_M^{(-2)}(P) = P_1.$$



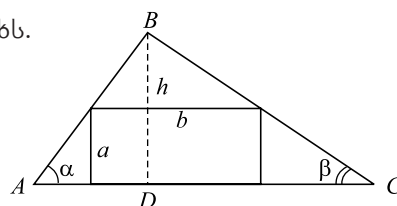
4 გთავაზობთ ამ ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ ხერხს.

BD სიმაღლეა, $BD=h$; მაშინ გვაქვს:

$$\frac{h}{h-a} = \frac{AC}{b}$$

$$hb = AC \cdot (h-a), \quad b = \frac{AC(h-a)}{h},$$

$$ab = \frac{AC}{h}(h-a)a.$$



AC და h მოცემულია, ამიტომ $S=ab$ უდიდესია, როცა $-a^2+ha$ უდიდესია. ეს კი მიიღწევა, როცა $a=\frac{AC}{h}$, $b=\frac{AC}{h}$.

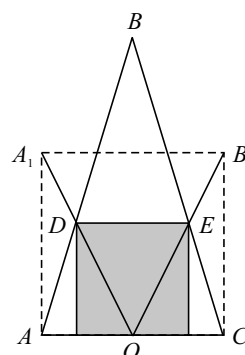
$$AC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + b + \frac{a}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{a}{\operatorname{tg} \beta}; \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha.$$

5 სურათიდან ჩანს აგების პროცესი.

AC გვერდზე ავაგოთ AA_1B_1C კვადრეტი.

საძიებელი კვადრეტი AA_1B_1C -ს ჰომოთეტიურია ცენტრით AC -ს შუა წერტილში, კოეფიციენტით $\frac{OE}{OB_1}$ (E წერტილი OB_1 -ის BC გვერდთან გადაკვეთის წერტილია).



ამოცანები თვითშეფასებისთვის

მითითებები:

1 $S_1=10$; a კუბის წიბოა. პირობით,

$$a \cdot \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = 10$$

$$20 = a^2 \sqrt{5}$$

$$a^2 = 4\sqrt{5}$$

$$V = 8\sqrt[4]{125}$$

$$S = 24\sqrt{5}$$

5 ცხადია, $C=(-3; -3\sqrt{3})$; $B=(3; -3\sqrt{3})$;

$$\angle AOA_1 = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \angle DOD_1 = \frac{\pi}{3}.$$

$$D=(-3; 3\sqrt{3})$$

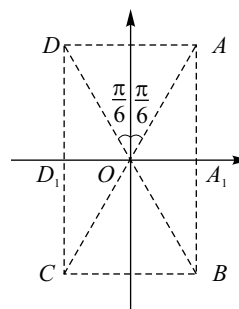
$ABCD$ მართკუთხედი.

განვიხილავთ, პარალელურ გადატანას ვექტორით: $\vec{p}(2; 1)$ და ვიყენებთ ფორმულებს:

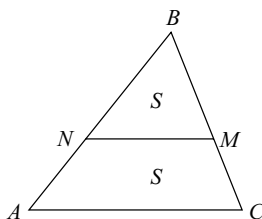
$$x' = x + 2$$

$$y' = y + 1.$$

თანაკვეთა მართკუთხედი.

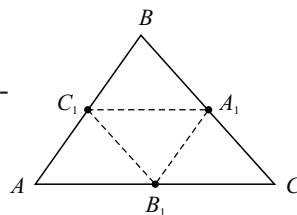


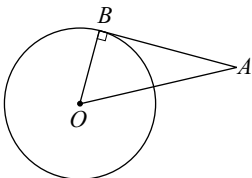
6 პირობის თანახმად, $S_{ABC} = 2S_{MBN}$
 მაშასადამე, $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{MB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
 $\frac{P_{MNB}}{P_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$
 $P_{MBN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 48 = 24\sqrt{2}.$



7 განვიხილოთ ჰომოთეტია მედიანების გადაკვეთის M წერტილის მიმართ:

$$H_M^{-2}, \text{ მაშინ } H_M^{-2}(A_1B_1C_1) = ABC.$$



9  OM მხეზია; ამიტომ $OM \perp AM,$
 $OA = 3x, OM = 2x,$
 $\sin \angle OAB = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$
 $\cos \angle OAB = \frac{\sqrt{5}}{2}; \operatorname{tg} \angle OAB = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

10 $\arcsin(\cos \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$

VIII თავის დამატებითი ამოცანები

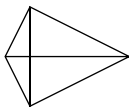
მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

1 „პარალელოგრამი რომბია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დიაგონალები მართობულია“. ეს წინადადება ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია წინადადებები:

თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ პარალელოგრამი რომბია; თუ პარალელოგრამი რომბია, მაშინ დიაგონალები ურთიერთმართობულია. ორივე თეორემა ადვილად მტკიცდება.

განვიხილოთ წინადადება: თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ოთხკუთხედი რომბია.

არ არის ჭეშმარიტი. კონტრმაგალითი:



ეს ოთხკუთხედი არ არის პარალელოგრამი, არ არის რომბი.

განვიხილოთ წინადადება: თუ ოთხკუთხედი რომბია, მაშინ ამ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, წინადადება ჭეშმარიტია.

3 ვიყენებთ ფართობის ადიციურობას.

$$S = ab - 2\pi r^2, \quad a = 4r; \quad b = 2r;$$

$$S = 8r^2 - 2\pi r^2 = r^2(8 - 2\pi) = 64(8 - 2\pi).$$

$$\pi r^2 = 64\pi, \quad r^2 = 64.$$

$$\textcircled{4} \quad V_1 = \frac{1}{3} Q \cdot H_1, \quad H_1 = \frac{3}{5} H$$

$$V_1 = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{3}{5} H = \frac{1}{5} V = \frac{1}{5} \cdot 180 = 36 \text{ (სმ}^3\text{)}.$$

$\textcircled{5}$ შენებების გამო, მელანოს ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი მართკუთხედია, რომლის ზომებია: 20×10 (ე. ი. $2\pi r = 20, h = 10$); მართას ცილინდრის — 8×22 (ე. ი. $2\pi r = 8, h = 22$). ამ მონაცემებით ადვილად ვიპოვით მოცულობებს.

$$V_1 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} \cdot 10, \quad V_2 = \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot 22,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1000}{16 \cdot 22} \approx 2,84.$$

$$\textcircled{7} \quad 4\pi r_1^2 = 9\pi; \quad r_1 = \frac{3}{2} \text{ დმ} = 15 \text{ სმ};$$

$$r = 13 \text{ სმ}; \quad V = \frac{4}{3} \cdot 13^3 \pi.$$

$$\textcircled{8} \quad AC\text{-ს მიმართ სიმეტრიით:}$$

$$D \rightarrow D', \quad C \rightarrow C, \quad A \rightarrow A, \quad B \rightarrow B',$$

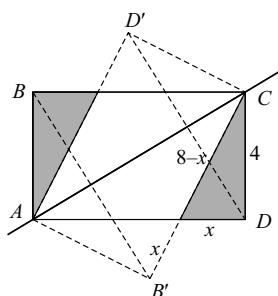
$$ABCD \rightarrow AB'CD'$$

$$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$$

$$16x = 48$$

$$x = 3,$$

$$S = 4 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 32 - 12 = 20 \text{ (სმ}^2\text{)}.$$



$$\textcircled{9} \quad B = (6; 2,5); \quad C = (-6; -2,5); \quad A = (-6; 2,5)$$

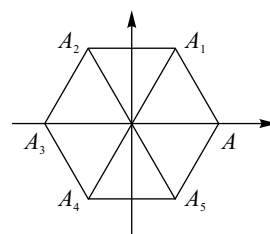
$$AC = 12, \quad BC = 13, \quad P = 13 + 5 + 12 = 30$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30.$$

$$\textcircled{10} \text{ ა) ამ შემთხვევაში გვაქვს წერტილები:}$$

$$A = (2; 0), \quad A_1 = (0; 2), \quad A_2 = (-2; 0); \quad A_3 = (0; -2).$$

მიიღება კვადრეტი, რომლის ფართობი არის $(2\sqrt{2})^2 = 8$ კვ. ერთ.



ბ) მიიღება წერტილები:

$$A = (2; 0), \quad A_1 = (1; \sqrt{3}); \quad A_2 = (-1; \sqrt{3});$$

$$A_3 = (-2; 0); \quad A_4 = (-1; -\sqrt{3}); \quad A_5 = (1; -\sqrt{3});$$

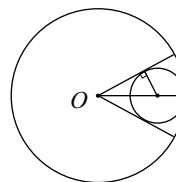
$$S = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \text{ კვ. ერთ.}$$

$$\textcircled{13} \quad R = 12; \quad r = \frac{R-r}{2}, \quad 30^\circ\text{-იანი კუთხის თვისებით.}$$

$$r = 6 - \frac{r}{2}$$

$$\frac{3r}{2} = 6, \quad r = 4.$$

$$S = 16\pi \text{ (სმ}^2\text{)}.$$



$$\textcircled{14} \quad \frac{2x-1}{6} = \frac{8}{6}, \quad 2x-1=8$$

$$2x=9$$

$$x=4,5.$$

16) ვთქვათ, O არის BC -ს შუა წერტილი, მაშინ $O=(7; 3)$.

ესარგებლობთ ფორმულებით: (ჰომოთეტია $(a; b)$ წერტილის მიმართ k კოეფიციენ-
ტით):

$$x' = kx + (1-k)a, \quad a=7$$

$$y' = ky + (1-k)b, \quad b=3$$

$$k=2,5.$$

ვიპოვოთ A_2 , B_2 და C_2 წერტილების კოორდინატებს; შემდეგ ვიყენებთ პარალელური
გადატანის ფორმულებს:

$$x' = x + a \quad \left| \quad a = -2$$

$$y' = y + b \quad \left| \quad b = 3.$$

აქ ჩავსვამთ A_2 , B_2 და C_2 წერტილების კოორდინატებს.

მაგალითად, $A(2; 4) \rightarrow A_2(2,5 \cdot 2 + 7(1-2,5); 2,5 \cdot 4 + 3(1-1,25))$

$$A_2(-5,5; 5,5) \rightarrow (-7,5; 8,5).$$

17) ვითვალისწინებთ: თუ სამკუთხედები ჰომოთეტიურია, მაშინ ეს სამკუთხედები მს-
გავსია, თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტია k , მაშინ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის გვერდებია: $8k$, $12k$
და $15k$;

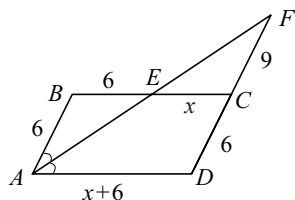
$$35k = 84, \quad k = \frac{12}{5} = 2,4.$$

18) ა) ამ ამოცანის ამოხსნისას, ვიყენებთ ფორმულებს:

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a; \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 2 \cdot 2 \end{cases}$$

აქედან $\begin{cases} x = \frac{x' + 2}{3} \\ x = \frac{y' + 4}{3}. \end{cases}$ ჩასმით მივიღებთ: $y' = -4x' - 3$.

21)



$$\begin{aligned} \frac{x}{x+6} &= \frac{9}{15} \\ 15x &= 9x + 54 \\ 6x &= 54 \\ x &= 9 \\ P &= 2 \cdot (15 + 6) = 42 \text{ (სმ)}. \end{aligned}$$

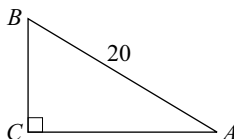
24)

$$\cos A = \frac{2}{5}, \quad \sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$AC = 20 \cdot \frac{2}{5}$$

$$AC = 8$$

$$BC = 4\sqrt{21}.$$



25)

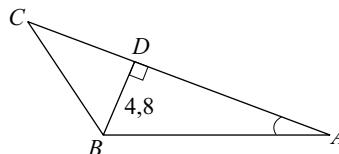
$$AD = \frac{4,8}{\operatorname{tg} A} = \frac{4,8}{2,4} = 2 \text{ (სმ)},$$

$$CD = \frac{4,8}{\operatorname{tg} C} = \frac{4,8}{12} \cdot 35 = 35 \cdot 0,4 = 14 \text{ (სმ)}$$

$$AC = 16 \text{ (სმ)}, \quad AB = \sqrt{4,8^2 + 2^2} = 5,2 \text{ (სმ)},$$

$$BC = \sqrt{4,8^2 + 14^2} = 14,8 \text{ (სმ)},$$

$$P = 5,2 + 14,8 + 16 = 36 \text{ (სმ)}.$$



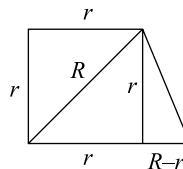
27) ბ) $(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha})(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}) = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{(-\sin^2 \alpha)(-\cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = 1$

- 29) ცილინდრის სიმაღლე — H
 სფეროს რადიუსია — R
 ცილინდრის ფუძის რადიუსი — r

$$H = r$$

$$R = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{4\pi R^2}{2\pi r^2 + 2\pi r^2} = \frac{4\pi \cdot 2r^2}{4\pi r^2} = 2.$$



შემაჯამებელი ნაწილი

თემა: გეომეტრია და გაზომვა

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: გეომეტრიული ობიექტები, ზომები, კოორდინატები, გეომეტრიული გარდაქმნები, სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები და მსგავსი სამკუთხედების თვისებები. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა გამოავლინოს გეომეტრიული ობიექტების განსაზღვრებათა ცოდნა, აღწეროს გეომეტრიულ გარდაქმნათა სახეები და გამოიყენოს ეს ცოდნა პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, უნდა შეძლოს მარტივი ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლასა და ამ ფუნქციებს შორის არსებულ თანაფარდობებზე.

ამოცანების ნიმუშები:

1) E წერტილი $ABCD$ პარალელოგრამის CD გვერდის შუა წერტილია. AED სამკუთხედის ფართობი 108 სმ^2 -ია. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი. შეასრულეთ ნახაზი.

2) მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის კოსინუსი $0,4$ -ის ტოლია. იპოვეთ ამავე კუთხის სინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

3) იპოვეთ რიცხვითი მნიშვნელობა:

$$\frac{(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3}}.$$

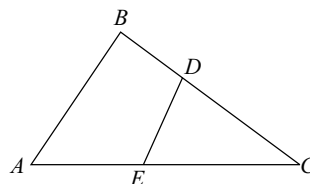
4) დაწერეთ $y = \frac{2x-1}{x+3}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. დაადგინეთ, რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია x -ს და რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია y -ს?

5) ცნობილია, რომ $A(2a+1; 2b-6)$ წერტილი სიმეტრიულია $B(2c+1; b-1)$ წერტილის Oy ღერძის მიმართ, $C(c+4; 3d-1)$ წერტილი კი B -ს სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ. იპოვეთ a , b , c და d .

⑥ A და B წერტილები მიიღება საკოორდინატო სიბრტყის $M(4; 0)$ წერტილისგან სათავის ირგვლივ, შესაბამისად, 60° -იანი და 120° -იანი კუთხით მობრუნებისას. იპოვეთ A და B წერტილის კოორდინატები; AOB სამკუთხედის ფართობი.

⑦ სურათზე D და E წერტილები ისეა არჩეული სამკუთხედის გვერდებზე, რომ $\angle DEC = \angle B$. ცნობილია, რომ $AC = 26$ სმ, $BC = 28$ სმ, $AB = 30$ სმ და ED მეტია DC -ზე 1 სმ-ით.

იპოვეთ ABC და EDC სამკუთხედების პერიმეტრები და ფართობები.



⑧ გაამარტივეთ $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha + (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin^2 \alpha$.

⑨ $A_1B_1C_1$ არის ABC სამკუთხედის ჰომოთეტიური O კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიისას კოეფიციენტით $k = -2,4$. ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია $C(-2; -1)$, $A(1; 5)$, $B(2; -3)$.

ა) იპოვეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები,

ბ) იპოვეთ ამ სამკუთხედების გვერდების სიგრძეები,

გ) დაადგინეთ ამ სამკუთხედებიდან თითოეულის სახე (კუთხეების მიხედვით),

დ) იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობები.

პასუხები: ① 432 სმ². ② $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$. ③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ④ $y = \frac{3x+1}{2-x}$, $x \neq -3$, $y \neq 2$. ⑤ $a = -4$, $b = 5$, $c = 3$, $d = -1$. ⑥ $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(-2; 2\sqrt{3})$, $S = 4\sqrt{3}$ კვ. ერთ. ⑦ $P_{ABC} = 84$ სმ, $P_{EDC} = 21$ სმ, $S_{ABC} = 336$ სმ², $S_{EDC} = 21$ სმ². ⑧ 2. ⑨ ა) $A_1(-2,4; -12)$, $B_1(-4,8; 7,2)$, $C_1(4,8; 2,4)$, ბ) $AB = \sqrt{65}$, $AC = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $A_1B_1 = 2,4\sqrt{65}$, $A_1C_1 = 7,2\sqrt{5}$, $B_1C_1 = 4,8\sqrt{5}$, გ) სამკუთხედები მართკუთხაა, დ) $S_{ABC} = 15$ კვ. ერთ, $S_{A_1B_1C_1} = 86,4$ კვ. ერთ.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

① ნახაზის შესრულებისთვის მოსწავლეს დაენეროს 0,5 ქულა, თუ აღმოაჩინა, რომ AED სამკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობის მეოთხედია — კიდევ 1 ქულა, 0,5 ქულა დაემატოს პარალელოგრამის ფართობის გამოთვლისთვის. სულ — 2 ქულა.

② კუთხის სინუსის გამოთვლისთვის დაენეროს 1 ქულა, კიდევ 1 ქულა — ტანგენსის და კოტანგენსის გამოთვლისთვის. სულ — 2 ქულა.

③ $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ და $\frac{\pi}{3}$ კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან თითოეულის სწორად მითითება შეფასდეს 0,5 ქულით, კიდევ 0,5 ქულა დაენეროს მიღებული გამოსახულების გამარტივებისთვის. სულ — 2 ქულა.

④ თუ გამოსახა x y -ის საშუალებით, შეფასდეს 1 ქულით; 0,5-0,5 ქულით შეფასდეს x -ისა და y -ის მნიშვნელობების დადგენა. სულ — 2 ქულა.

⑤ თუ დაწერა წერტილების კოორდინატების თანაფარდობები ღერძების მიმართ სიმეტრიის თვისებების გათვალისწინებით და იპოვა საძიებელი სიდიდეები, მისაღები 4 განტოლებიდან თითოეული შეფასდეს 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑥ *A* წერტილის კოორდინატების პოვნა შეფასდეს 1 ქულით, *B* წერტილის — კიდევ 0,5 ქულით. 0,5 ქულა დაემატოს *AOB* სამკუთხედის ფართობის პოვნისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑦ თუ შეამჩნია სამკუთხედების მსგავსება და დაწერა პროპორცია — შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულა — *EDC* სამკუთხედის გვერდების გამოთვლისთვის და სამკუთხედების პერიმეტრების დადგენისთვის. სამკუთხედებიდან თითოეულის ფართობის გამოთვლა შეფასდეს 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑧ 1 ქულით შეფასდეს ფრჩხილებში მოცემული გამოსახულებების გამარტივება; კიდევ 1 ქულა დაემატოს საბოლოო პასუხის მიღებისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑨ თითოეული პუნქტის შესრულება შეფასდეს 1 ქულით. სულ — 4 ქულა.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულის დასადგენად მოსწავლის მიერ დაგროვილი ქულების ჯამი გაიყოს 2-ზე.

მე-8 თავის შემაჯამებელ წერას გამორჩეული დატვირთვა აქვს. ეს თავი მიეძღვნა გეომეტრიულ ფიგურებს, გეომეტრიულ გარდაქმნებს, ტრიგონომეტრიის საწყისებსა და მათ გამოყენებებს.

წერის შედეგების ანალიზისა და სათანადო განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგ, თქვენ მოგიწევთ ჩაატაროთ განმავითარებელი შეფასება არსებული ხარვეზების დაძლევის, ცოდნის განმტკიცების, გამოყენებათა უკეთ გააზრების მიზნით. გთავაზობთ რამდენიმე რეკომენდაციას, რომელიც, შესაძლოა, გამოიყენოთ ამ აქტივობაში. ხაზგასმით აღვნიშნავთ, რომ განმავითარებელი შეფასებისას ძირითადი აქცენტი უნდა გაკეთდეს სამიზნე ცნებებსა და მათთან დაკავშირებულ მკვიდრ წარმოდგენებზე. ამ აქტივობისას მაქსიმალურ ეფექტს იძლევა აღნიშნულ საკითხთა ინტერაქტიული შემოქმედებითი განხილვა. შემაჯამებელი წერის ყოველი დავალების გადაჭრის ხარისხის შესაბამისად თქვენი განმავითარებელი შეფასება სათანადო დატვირთვით უნდა გამოირჩეოდეს.

① ამოცანაში იმსჯელეთ ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა გზაზე. იმსჯელეთ სამკუთხედის ფართობის გამოთვლის ფორმულაზე. შეიძლება პარალელოგრამის ტოლ სამკუთხედებად დაყოფაზეც გაამახვილოთ ყურადღება.

②, ③ და ⑧ ამოცანებში კიდევ ერთხელ დაუბრუნდით მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცნებებს. იმსჯელეთ მათ შორის არსებულ ძირითად თანაფარდობებზე, მათ მნიშვნელობებზე არგუმენტის ზოგიერთი კონკრეტული მნიშვნელობისთვის.

④ ამოცანის განხილვისას კლასმა ყურადღება გაამახვილოს ფუნქციისა და შექცევადი ფუნქციის ცნებებზე. განიხილეთ შექცევადი და შეუქცევადი ფუნქციების მაგალითები, იმსჯელეთ მათი განსაზღვრის არეზე და მნიშვნელობათა სიმრავლეზე.

⑤, ⑥, ⑦ და ⑨ ამოცანების განხილვისას ყურადღებით მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები გეომეტრიულ გარდაქმნებზე, მათ თვისებებზე, კოორდინატების გარდაქმნაზე, სამკუთხედების მსგავსების ნიშნებზე, მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრების შეფასებასა და ფართობების შეფარდებაზე.

შემაჯამებელი წერის მიხედვით დადგენილი დონეების (მოსწავლეთა აკადემიურ მიღწევათა ხარისხების) კლასიფიკაცია უნდა მოხდეს სოლო ტაქსონომიის მიხედვით. გთავაზობთ სავარაუდო კლასიფიკაციას.

პრესტრუქტურული დონე. იცნობს ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს, თუმცა მათი ფორმების აღწერა, სათანადო რაოდენობრივი დახასიათება, გეომეტრიული გარდაქმნები, ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები, მისთვის გადაულახავ სირთულეებს უკავშირდება. უჭირს ტექსტური ამოცანების შინაარსის მკაფიო აღქმა.

უნიტრუქტურული დონე. გაცნობიერებული აქვს შესწავლილი გეომეტრიული ფიგურების უმარტივესი მახასიათებელი თვისებები, იცნობს სიდიდეთა ზომის არაერთ ერთეულს, თუმცა, მისთვის რადიანული ზომა პრობლემურია. მკაფიოდ ვერ აღიქვამს ზოგიერთ გეომეტრიულ გარდაქმნას, შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს. შეუძლია უმარტივესი ამოცანების ამოხსნა ცენტრულ და ღერძულ სიმეტრიებზე, სამკუთხედების მსგავსებაზე.

მულტისტრუქტურული დონე. იცნობს ყველა განხილულ საკითხს, ახერხებს სათანადო არართული პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნას. ფერხდება შედარებით რთული ამოცანების ამოხსნისას, რომლებიც დაკავშირებულია ზოგიერთ გეომეტრიულ გარდაქმნასთან, მათ პრაქტიკულ გამოყენებასთან.

მიმართებითი დონე. სახელმძღვანელოში, სასწავლო პროცესში განხილული ყველა საკითხი კარგად აქვს გააზრებული და ახერხებს კიდევ მათ გადმოცემას, თუმცა ნაკლები დამაჯერებლობა იგრძნობა გეომეტრიულ გარდაქმნათა კომპოზიციის აღწერისა, თეორიულ ცოდნას იყენებს პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მე-10 თავში გადმოცემული ყველა სამიზნე ცნება და საკვანძო საკითხი ღრმად აქვს გააზრებული, ამ ცოდნას იყენებს პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, მათ ამოხსნასთან ერთად წარმოადგენს ხოლმე ამ გზის ანალიზს და შესაძლო განზოგადებებს. გეომეტრიული ობიექტების კვლევისას იყენებს ტრიგონომეტრიულ და შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, აინტერესებს მაღალი სირთულის საინტერესო ამოცანები და ახერხებს მათ კვლევას. ახასიათებს საკითხების გადმოცემის მაღალი დონე.

IX თავი

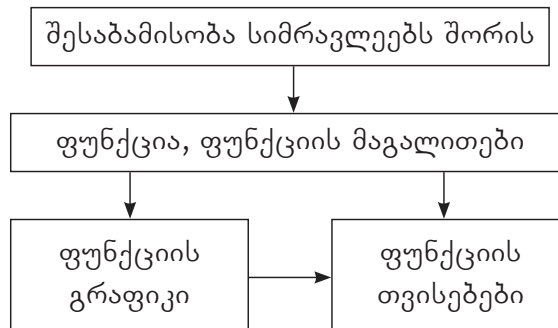
დამოკიდებულებები სიმრავლეებს შორის. ფუნქცია

თემა: ალგებრა და კანონზომიერებები საათების სავარაუდო რაოდენობა: 14 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: დამოკიდებულებები სიმრავლეებს შორის, ფუნქცია			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია, დამოკიდებულება სიდიდეებს შორის. სიდიდეებს შორის შეიძლება არსებობდეს ფუნქციური კავშირი; ფუნქცია გამოიყენება ცვლილებათა გასაანალიზებლად და რეალური მოვლენების მოდელირებისთვის	ფუნქცია; ფუნქციის მოცემის ხერხები; ფუნქციის გრაფიკი; ფუნქციის თვისებები.	რა სახის შესაბამისობაა ფუნქცია? არის თუ არა ნებისმიერი შესაბამისობა ფუნქცია? რა არის ფუნქციის გრაფიკი?	ელექტროენერგია, ელექტროენერგიის მოხმარების გადასახადის გადახდის წესი.
შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს შესასწავლი სიტუაციიდან გამომდინარე, ცვლად სიდიდეთა შორის ფუნქციური კავშირის დამყარება და წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით.			

მე-9 თავის ძირითადი სამიზნე ცნებაა ფუნქცია. ვიწყებთ სიდიდეებს შორის სხვადასხვა კავშირის განხილვით და მათ შორის ისეთი დამოკიდებულებების აღმოჩენით, როცა ერთი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას მეორე სიდიდის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. ცხადია, შესაბამისობის მკაცრი მათემატიკური განსაზღვრება სასკოლო კურსში არ განიხილება; მაშასადამე, შეიძლება ითქვას, რომ „ფუნქცია“ სასკოლო კურსში საწყისი

ცნებაა (იხ; მაგ. [21]). თუმცა, ეს ცნება და მასთან დაკავშირებული საკითხები (გრაფიკი, თვისებები, მაგალითები) დაწვრილებით აღინერება და საშუალებას აძლევს მოსწავლეებს, კარგად გაიაზრონ ეს სამიზნე ცნება.

IX თავში წარმოდგენილი მასალა შეიძლება შემდეგი სქემით დავახასიათოთ:



კომპლექსური დავალებით წარმოდგენილია ელექტროენერგიის საფასურის გადასახადის ელექტროენერგიის რაოდენობაზე (კილოვატსაათები) დამოკიდებულების აღმწერი ფუნქცია, რომელიც ისეთი დამოკიდებულების მაგალითია, რომელიც სხვადასხვა ფორმულით მოიცემა (ფუნქციის მოცემის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მაგალითს აღწერს).

§9.1. სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების მაგალითები. ფუნქცია

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების, მათ შორის, ფუნქციური დამოკიდებულებების განხილვა საბაზო საფეხურიდან იწყება. საშუალო საფეხურზე ღრმავდება ცოდნა ამ სამიზნე ცნების შესახებ. მოსწავლეები ეცნობიან ფუნქციის გამოსახვის მაგალითებს, ახალ თვისებებს.

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების განხილვას პრაქტიკული მაგალითებით ვიწყებთ. მათ შორის გამოვარჩევთ ისეთ დამოკიდებულებებს, რომლებიც შეიძლება ფორმულით გამოვსახოთ. სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებს თეორიულ-სიმრავლური ენით აღვწერთ — სიდიდეებით წარმოდგენილ სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებების მაგალითებით და ამ დამოკიდებულებებს შორის ისეთის გამოყოფით, როცა მოცემული სიმრავლის ყოველ ელემენტს მეორე სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება. „დამოკიდებულება“, „შესაბამისობა“ საწყისი ცნებებია, მათ მაგალითებით აღვწერთ და მოსწავლეები გაიაზრებენ, როგორც $(x; y)$ წყვილების სიმრავლეს, x ელემენტი პირველ სიმრავლეს (განსაზღვრის არეს) ეკუთვნის, y — მეორე სიმრავლეს, სიმრავლეს რომელიც მნიშვნელობათა სიმრავლეს შეიცავს. გამოვყოფთ ისეთ ფუნქციებს, რომლებისთვისაც განსაზღვრის არე რიცხვებისგან შედგება, მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ფუნქციის წარმოდგენა დიაგრამით აადვილებს ამ ცნების გააზრებას.

მნიშვნელოვანია შეთანხმება, რომელიც რიცხვით ფუნქციებს ეხება — როცა ფუნქცია ფორმულით არის მოცემული, როგორც წესი, განსაზღვრის არეს არ ვუთითებთ და

განსაზღვრის არე ყველა იმ ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეა, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს; შესაბამისად, კორექტულად მივიჩნევთ კითხვას: რა არის ფორმულით მოცემული კონკრეტული ფუნქციის განსაზღვრის არე?

რამდენიმე ასეთ კითხვაზე პასუხის შერჩევას „ტესტური“ დავალებებიც შეიცავს.

მაგალითად, ②, ③ და ④ ტესტებში ფუნქცია სხვადასხვა სახითაა მოცემული.

ფორმულით მოცემული ფუნქციისთვის განსაზღვრის არე არის x -ის ის მნიშვნელობები, რომლისთვისაც მოცემულ გამოსახულებას აზრი აქვს; წილადს აზრი აქვს, როცა მნიშვნელოვანი ნულს არ უდრის; არითმეტიკული კვადრატული ფესვის შემთხვევაში, ფესვქვეშა გამოსახულება არაუარყოფით მნიშვნელობებს უნდა იღებდეს; წყვილებით წარმოდგენილი ფუნქციისთვის, წყვილების პირველი ელემენტები ქმნის განსაზღვრის არეს. ⑥ „ტესტის“ ამოხსნა მოითხოვს იმის გააზრებას, რომ $X \rightarrow Y$ ასახვისას, Y სიმრავლის რომელიმე ელემენტს შეიძლება არ ჰქონდეს წინა სახე.

მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

⑦ მოსწავლეებმა თანაბარაჩქარებული მოძრაობა მე-9 კლასში შეისწავლეს; თუ აჩქარება არის a , საწყისი სიჩქარე — v_0 , მაშინ t დროში გავლილი მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $S=S_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$; ამ ფორმულით მოიცემა დამოკიდებულება S მანძილსა და t დროს შორის; უნდა გავითვალისწინოთ, რომ სიდიდეები ერთი და იმავე სისტემაში იყოს გამოსახული: მაგალითად, მანძილი — მეტრებში, დრო — წამებში, აჩქარება — მ/წმ²-ში, სიჩქარე — მ/წმ-ში.

⑧ ამ ამოცანაში ვითვალისწინებთ წინა ამოცანის მოთხოვნებს — სიდიდეები ერთი და იმავე სისტემაში უნდა იყოს გამოსახული.

თუ დაძვრის მომენტიდან მოძრაობა მუდმივი a აჩქარებით მიმდინარეობს, v სიჩქარე t დროის ფუნქციაა, $v=at$; მაგრამ სიჩქარე უნდა გამოვსახოთ მ/წმ-ში.

$$\begin{aligned} 90 \text{ კმ/სთ} &= \frac{90 \cdot 1000}{3600} = \frac{90 \cdot 5}{18} = 25 \text{ (მ/წმ)} \\ 25 &= 0,1 \cdot t, \\ t &= 250 \text{ (წმ)}. \end{aligned}$$

⑨ ფუნქციის წყვილებით წარმოდგენისას, არ უნდა გვხვდებოდეს ორი წყვილი, რომლებშიც პირველი ელემენტები ტოლია, მეორე — განსხვავებული. მაგალითად, ბ) შემთხვევაში გვაქვს ორი წყვილი: (1; -2) და (1; 1) ტოლი პირველი ელემენტებით. შესაბამისად, ბ) წყვილებით წარმოდგენილი შესაბამისობა არ არის ფუნქცია.

⑩ თუ განსაზღვრის არეა $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, მაშინ მნიშვნელობათა სიმრავლე იქნება: $B = \{4; 1; 0\}$.

მიიღება წყვილების სიმრავლე: $\{(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)\}$,

$$\begin{aligned} ⑪ \quad S &= \pi r^2, \quad C = 2\pi r, \quad r = \frac{C}{2\pi}. \\ S &= \pi \left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot C^2. \end{aligned}$$

⑫ მოსწავლემ უნდა შეძლოს, გაერკვეს სხვადასხვა ფორმულაში, რომლებითაც ფუნქციაა წარმოდგენილი და გამოთვალოს ფუნქციის მნიშვნელობა მითითებულ წერტილში; უნდა გაითვალისწინოს შუალედი, რომელსაც ეს წერტილი ეკუთვნის.

12, 13 და 14 ამოცანები შეიძლება კლასში დამოუკიდებელი წერის ჩასატარებლად გამოვიყენოთ — მოსწავლე სხვადასხვა წესით წარმოდგენილი ფუნქციის მნიშვნელობებს პოულობს და ავსებს ცხრილს.

15 ამოცანაში ცხრილის შევსების შემდეგ შეიძლება დავსვათ დამატებითი კითხვა — ამჩნევთ, თუ არა კანონზომიერებას (კავშირს), რომელიც ერთნაირია ყველა პირამიდისთვის? მაგალითად, პირველი ორი სვეტი ასე გამოიყურება:

5	6
8	10
5	6

პირველი ორი სვეტის შედარებითაც ჩანს, რომ

$$5+5-8=2,$$

$$6+6-10=2.$$

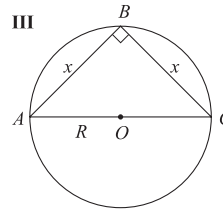
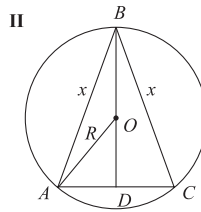
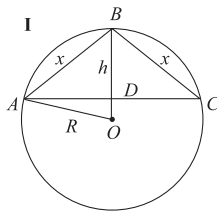
ეილერის ცნობილი ფორმულა ნებისმიერი მრავალწახნაგას წვეროების, წიბოებისა და წახნაგების რაოდენობათა შესახებ მასწავლებლებისთვის ცნობილი უნდა იყოს.

მოსწავლეებს შეიძლება $v(n)$, $e(n)$ და $f(n)$ რიცხვები ნებისმიერი n -სთვის წარმოადგენინოთ:

$$v(n)=n+1, \quad e(n)=2n, \quad f(n)=n+1,$$

$$(n+1)+(n+1)-2n=2.$$

17* მოსწავლეები სამივე შემთხვევას უნდა ითვალისწინებდნენ:



აქ $OD=R-h$,

$OD=h-R$

I შემთხვევაში $\triangle AOD$ -დან $R^2=(R-h)^2+AD^2$

II-ში — $R^2=(h-R)^2+AD^2$

გავითვალისწინოთ, რომ $AD^2=x^2-h^2$, მივიღებთ:

$$h=\frac{x^2}{2R}$$

$$S=AD \cdot h=\sqrt{x^2-h^2} \cdot h.$$

მაშასადამე, $S(x)=\frac{x^3}{4R^2}\sqrt{4R^2-x^2}.$

შეიძლება ვისარგებლოთ ურთიერთგადამკვეთი ქორდების თვისებით:

$$AD^2=h(2R-h);$$

$$x^2-h^2=2Rh-h^2$$

$$x^2=2Rh$$

$$h=\frac{x^2}{2R}.$$

III. $h=R=\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad x=R\sqrt{2}. \quad S=\frac{1}{2}x^2.$

18 $f(0)=1, f(1)=2, f(4)=3, f(9)=4.$

მაღალი მზაობის მოსწავლემ შეიძლება გაამახვილოს ყურადღება შემდეგ ფაქტზე:

$$\sqrt{0}=0, \quad \sqrt{1}=1, \quad \sqrt{4}=2, \quad \sqrt{9}=3,$$

$$\sqrt{0}+1=1, \quad \sqrt{1}+1=2, \quad \sqrt{4}+1=3, \quad \sqrt{9}+1=4.$$

მაშასადამე, შემჩნეულ კანონზომიერებას მივყავართ მითითებული სახის ერთ-ერთი ფუნქციის აღმოჩენამდე:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1.$$

საშინაო დავალების ამოცანათა უმრავლესობა კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. თუმცა, შეიძლება გამოვყოთ ამოცანები, რომლებიც განსხვავებულ მიდგომებს მოითხოვს.

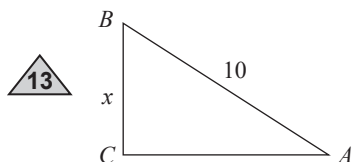
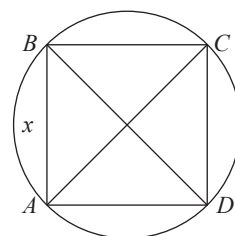
9 ყუთი მართკუთხა პარალელებიპედი, რომლის სიმაღლეა x , ფუძე კვადრატია $(36-2x)$ სმ გვერდით.

მოცულობის ფორმულა შეიძლება ცნობარის საშუალებით გავიხსენოთ:

$$V = (36-2x)^2 \cdot x.$$

10 თუ $AB = x$, მაშინ $AD = \sqrt{4R^2 - x^2}$, მართკუთხედის S ფართობი x -ის ფუნქცია:

$$S(x) = x \sqrt{4R^2 - x^2}.$$



$$AC = \sqrt{100 - x^2},$$

$$P(x) = x + 10 + \sqrt{100 - x^2} \quad (\text{სმ}).$$

15 მოსწავლეები იხსენებენ რთული პროცენტის დარიცხვის წესს; n წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა n -ის ფუნქციაა და გამოითვლება ფორმულით:

$$f(n) = 2000(1 + 0,03)^n = 2000 \cdot (1,03)^n, \text{ სადაც } 2000 \text{ საწყისი თანხაა.}$$

16 ა) მოსწავლეები განიხილავენ წყვილებს:

$(0; 1), (2; 2), (4; 3), (6; 4).$

მეორე ელემენტი 1-ით მეტია პირველი ელემენტის ნახევარზე:

$$1 = \frac{0}{2} + 1; \quad 2 = \frac{2}{2} + 1, \quad 3 = \frac{4}{2} + 1, \quad 4 = \frac{6}{2} + 1.$$

მაშასადამე, აღმოაჩენენ მითითებული სახის ერთ-ერთ ფუნქციას:

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1.$$

ბ) $(0; -1), (1; 0), (2; 3), (6; 35)$ — აქ მეორე ელემენტები 1-ით ნაკლებია პირველის კვადრატზე $-1 = 0^2 - 1; 0 = 1^2 - 1, 3 = 2^2 - 1, 35 = 6^2 - 1.$

მაშასადამე, მითითებული სახის ერთ-ერთ ფუნქციაა $f(x) = x^2 - 1.$

17 $f(a+b) = f(a) + f(b) + 100 \cdot ab.$

თუ $a=0$ და $b=0$, მაშინ გვაქვს

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0,$$

მაშასადამე, $f(0) = 0.$

თუ $a=0,25; b=0,25$, მაშინ

$$f(0,5) = 2 + 2 + 100 \cdot 0,0625 = 10,25.$$

$$f(1) = f(0,5 + 0,5) = 10,25 + 10,25 + 100 \cdot 0,25 = 45,5.$$

§9.2. ფუნქციის გრაფიკი

ფუნქციის გრაფიკი ერთ-ერთი სამიზნე ცნებაა, რომლის გააზრება ფუნქციის ცნების მნიშვნელოვან თვისებას უკავშირდება ფუნქცია ისეთი შესაბამისობაა A და B სიმრავლებს შორის, როცა a -ს ყოველ ელემენტს შეესაბამება B -ს ერთადერთი ელემენტი. თუ A და B რიცხვითი სიმრავლეებია, ყოველ x რიცხვს A სიმრავლიდან შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი B სიმრავლიდან. მაშასადამე, ფუნქცია შეიძლება აღწეროს რიცხვთა ასეთი $(x; y)$ წყვილებით. წინარე ცოდნის გააქტიურებას, ფუნქციის აღნიშნული დამახასიათებელი თვისების წარმოდგენით, მოსდევს ახალი სამიზნე ცნების წარმოდგენა — ფუნქციის გრაფიკის ცნების აღწერა. ცნობილია ასეთი მიდგომა: ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისთვის, $(x; y)$ წყვილთა სიმრავლეს, რომლებიც ზემოთ აღწერილი წესით შეიქმნა, ფუნქციის გრაფიკს უწოდებენ. ჩვენ ამ ცნებას ვუკავშირებთ რიცხვითი A და B სიმრავლეების შემთხვევაში საკოორდინატო სიბრტყეზე $(x; y)$ წერტილთა სიმრავლის წარმოდგენას. f ფუნქციის გრაფიკი არის საკოორდინატო სიბრტყეზე $(x; f(x))$ წერტილების სიმრავლე. აქ მნიშვნელოვან საკვანძო შეკითხვად შეიძლება მივიჩნიოთ შეკითხვა: არის თუ არა ყოველი წერტილი (წერტილთა სიმრავლე) საკოორდინატო სიბრტყეზე რაიმე ფუნქციის გრაფიკი? მოსწავლემ უნდა შეძლოს დაწვრილებით უპასუხოს ამ კითხვას და ახსნას ის შემთხვევები, როცა მოცემული წერტილი არ შეიძლება იყოს რაიმე ფუნქციის გრაფიკი.

აღნიშნული საკითხის გააზრებას ხელს უწყობს ①, ③ და ⑥ ამოცანების ამოხსნა.

რამდენიმე ამოცანა (მაგალითად, ④, ③) შეიცავს დავალებას, რომელიც დაკავშირებულია წრენიის განტოლების ცოდნასთან. მაგალითად, იმ წრენიის განტოლება, რომლის ცენტრი არის კოორდინატთა სათავე, ხოლო რადიუსი 1-ის ტოლია, მოიცემა ფორმულით: $x^2+y^2=1$. თუ განვიხილავთ, ამ წრენიიდან დაკავშირებულ ნახევარწრენის $(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$, მაშინ იგი წარმოგვიდგენს $y=\sqrt{1-x^2}$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას. თუ $-1 \leq x \leq 1$ და $-1 \leq y \leq 0$, მაშინ შესაბამისი ნახევარწრენი $y=-\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკია. ③ ამოცანა კი წარმოგვიდგენს ფუნქციას: $y=-\sqrt{4-x^2}$, რომლის გრაფიკი $x^2+y^2=4$ წრენიის ნახევარწრენია, რომელიც მდებარეობს მე-3 და მე-4 მეოთხედებში.

მოსწავლეები იხსენებენ შეთანხმებას: თუ ფუნქცია ფორმულით არის მოცემული და დასმულია შეკითხვა: რა არის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე, მაშინ უნდა ვეძებოთ x -ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლებისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს (წილადს აზრი აქვს, როცა მნიშვნელი არ არის ნული, ფესვს — როცა ფესვეშა გამოსახულება არაუარყოფითია). შესაბამისად, მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ განსაზღვრის არეების პოვნა ამოცანებში: ⑦, ⑩, ⑪, ⑫, ⑩, ⑪, ⑫. ახლა განვიხილოთ ამოცანები, როცა მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა მოითხოვება. მოსწავლეს უნდა შევახსენოთ, რომ, x -ის მნიშვნელობების მიხედვით, უნდა განვსაზღვროთ — რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია y -ს. ეს შეიძლება სხვადასხვა ხერხით გაკეთდეს.

⑦ ა) $y=(x-1)^2+3$, ცხადია, $(x-1)^2 \geq 0$, მაშასადამე, $y \geq 3$.

მნიშვნელობათა სიმრავლე $[3; +\infty)$ შუალედი.

გ) $y=|x|$, $|x| \geq 0$.

მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0; +\infty)$.

დ) $y=\frac{1}{|x|}$, მნიშვნელობათა სიმრავლე, ცხადია, არის $(0; +\infty)$.

10 ა) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

I ხერხი: $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

ცხადია, $E(f) = [0; 1)$.

II ხერხი: $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, $yx^2 + y = x^2$, $(y-1)x^2 + y = 0$

$$x^2 = \frac{y}{1-y}, \quad \frac{y}{1-y} \geq 0, \quad \frac{y}{y-1} \leq 0$$

$$0 \leq y < 1.$$

11 $y = \frac{x}{3x+4}$

$$3xy + 4y = x$$

$$x(1-3y) = 4y, \quad x = \frac{4y}{1-3y}, \quad y \neq \frac{1}{3}.$$

12 გ) I. $y = \frac{x}{x+1}$
 $y = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.
 $E(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

II. $xy + y = x$
 $(1-y)x = y$
 $x = \frac{y}{1-y}, \quad y \neq 1$.

ბ) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 2}$

$$g(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 3}$$

$$E(g) = [0; +\infty).$$

დ) $y = \frac{x-1}{5x-2}$

$$5xy - 2y = x - 1$$

$$x(5y-1) = 2y-1$$

$$x = \frac{2y-1}{5y-1}, \quad y \neq \frac{1}{5}.$$

11 ბ) $2xy + 3y = 21$
 $2xy = 21 - 3y$
 $x = \frac{21-3y}{2y}$
 $y \neq 0$.

12 გ) I. $y = \frac{x+2-2}{x+2}$
 $y = 1 - \frac{2}{x+2}$
 $E(v) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

II. $xy + 2y = x$
 $x|1-y| = 2y$
 $x = \frac{2y}{1+y}$
 $y \neq 1$.

დ) $y = \frac{x-2}{3x-1}$,
 $3xy - y = x - 2$,
 $x(3y-1) = y-2$
 $x = \frac{y-2}{3y-1}$
 $y \neq \frac{1}{3}$.

მიითება 13 ამოცანის ამოსახსნელად.

ა) კუბის ზედაპირის S ფართობი გამოისახება კუბის a წიბოს საშუალებით:

$$S = 6a^2,$$

კვების s ფართობი ასე ჩაიწერება:

$$s = a^2 \sqrt{2}.$$

მაშასადამე,

$$S = \frac{6s}{\sqrt{2}}.$$

ბ) $V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{2}}}\right)^3,$

$$V = \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt[4]{8}}.$$

§9.3. სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებებისა და ფუნქციის მოცემის ხერხები

ვაგრძელებთ ფუნქციის შესახებ საკითხების განხილვას. წინარე ცოდნის გააქტიურება დაკავშირებულია ფუნქციის მოცემისთვის აუცილებელი სამი პირობის აღწერასთან; ფუნქციის მოცემა ნიშნავს განსაზღვრის არის, მნიშვნელობების შემცველი სიმრავლის და შესაბამისობის მითითებას. ამრიგად, მოცემის ხერხები შეიძლება იყოს წყვილების შესაბამისი ცხრილის მოცემა, გრაფიკის წარმოდგენა, ფორმულის მოყვანა.

ამასთანავე, ერთი და იმავე ფუნქციის მოცემისას, შეიძლება სხვადასხვა ფორმულა იყოს წარმოდგენილი.

ფუნქციის ცნების კარგად გააზრებას ემსახურება ისეთი შესაბამისობის განხილვა, რომლებიც არ არის ფუნქცია.

„ტესტური“ დავალებები და ამოცანები ხელს უწყობს ფუნქციის წარმოდგენათა შესახებ ცოდნის განმტკიცებას; ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილით, გრაფიკით, ფორმულებით. ამ შემთხვევების ცოდნა დაეხმარება მოსწავლეს, სწრაფად მიუთითოს პასუხები ①–⑤ „ტესტებში“. ანალოგიურია საშინაო „ტესტები“.

⑥ ზოგი მეცნიერი ამ ასახვას „გაიგივების“ აბსტრაქციის მაგალითად განიხილავს — მაგალითად, ყველა ნატურალურ რიცხვს, რომელიც 5-ზე გაყოფისას იძლევა ნაშთს 1-ს, ვუსაბამებთ რიცხვს 1-ს. ნატურალურ რიცხვთა თვისებების შესწავლა, ამ ასახვის გამოყენებით, დაიყვანება სასრულ სიმრავლეზე სრული ინდუქციის მეთოდის გამოყენებაზე. აღნიშნული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე 5 რიცხვისგან შედგება: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

⑦ ამ ამოცანაში განიხილება სხვადასხვა ფორმულით ფუნქციის მოცემის მაგალითი. თუ x წიგნების რაოდენობაა, მაშინ გადახდილი $f(x)$ ლარი ასე გამოითვლება:

$$f(x) = \begin{cases} 20x, & \text{თუ } x \leq 3 \\ 30 + 10x, & \text{თუ } 3 < x < 7, \\ 60 + 5x, & \text{თუ } x \geq 7. \end{cases}$$

ამ ფორმულით, ადვილად შეივსება მითითებული ცხრილი.

⑧ აქ $f(\sqrt{3})=0$, რადგან $\sqrt{3}$ ირაციონალურია, $f(3,1)=1$, რადგან 3,1 რაციონალური რიცხვია.

მოსწავლეები იხსენებენ რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების მაგალითებს. თუ n ნატურალური რიცხვი არ არის ნატურალური რიცხვის კვადრატი, მაშინ $\sqrt{n}$ ირაციონალური რიცხვია.

⑨ მაგალითად, 6-ს შეესაბამება ორი რიცხვი, შესაბამისობა არ არის ფუნქცია. შესაბამისობა დიაგრამითაა მოცემული.

⑩-⑫ ამოცანების ამოხსნისას, შეიძლება დავეხმაროთ მოსწავლეებს, შეიძლება ჩვენი მითითებებიც გამოიყენოთ.

⑩ ბ) $f(x) = \frac{x^2 - x}{2}$, $\varphi(x) = \frac{x - x^2}{2}$,
 მაშინ $f(-x) = \frac{x^2 + x}{2}$, $\varphi(1+x) = \frac{1+x - (1+x)^2}{2}$,
 $f(-x) + \varphi(1+x) = \frac{x^2 + x + 1 + x - 1 - 2x - x^2}{2} = 0$.

$$\text{ბ) } f(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+1)}{2}, \quad \varphi(1-x^2) = \frac{1-x^2 - (1-x^2)^2}{2}.$$

$$f(x^2+1) + \varphi(1-x^2) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 1 + 1 - x^2 - 1 + 2x^2 - x^4}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

⑪ თუ $f(x^3) = 3x^6 - 2x^3$, მაშინ $f(x^3) = 3(x^3)^2 - 2x^3$. მაშასადამე, $f(x) = 3x^2 - 2x$.

⑫ ვთქვათ, $f(x) = 2x - 3$, მაშინ $f(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$.

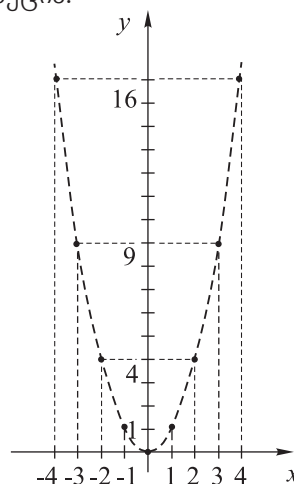
საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა.

⑦ არ არის ფუნქცია, 1-ს ორი რიცხვი შეესაბამება.

⑧ 2-ს შეესაბამება 4, 6, 8 და 10. შესაბამისობა არ არის ფუნქცია.

⑩ ფუნქციის შესახებ წარმოდგენას გვიქმნის წყვილები:
 $(-4; 16), (-3; 9), (-2; 4), (-1; 1), (0; 0),$
 $(1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16).$

$(n, f(n))$ წერტილები $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის.



⑫ ა) თუ $f(x^2) = \frac{1}{2x}$, $x > 0$

მაშინ ვწერთ:

$$f(x^2) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}; \text{ ე. ი. } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: $x^2 = t$, მაშინ $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. იგივეა რაც $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ბ) თუ $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x > 0$.

მაშინ $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{1}{x^2}}}$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

II გზა. $\frac{1}{x}$ აღვნიშნოთ t -თი, მაშინ $x = \frac{1}{t}$, მივიღებთ: $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$.

$$f(t) = \frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t}.$$

⑬ თუ $g(x) = 2x^2 - 1$, მაშინ $g(g(x)) = 2(g(x))^2 - 1 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

$$V(12) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ მ/წმ} = \frac{24 \cdot 3600}{1000} = 24 \cdot 3,6 = 86,4 \text{ კმ/სთ},$$

$$V(30) = 30 \text{ მ/წმ} = 30 \cdot 3,6 = 108 \text{ კმ/სთ}.$$

§9.4. ფუნქციის თვისებები

ფუნქციის სხვადასხვა თვისების შესწავლა თვალსაჩინოების გამოყენებით მიმდინარეობს. ეს აადვილებს მასალის ათვისებას, დამახსოვრებასა და გამოყენებას. მნიშვნელოვანია მოსალოდნელი შეცდომების მითითება და მათი თავიდან აცილების შესაძლებლობის აღწერა. ყველა თვისების დახასიათებას წინ უძღვის ფუნქციის ცნების შესახებ წინარე ცოდნის გააქტიურება (ფუნქციის გამოყოფა შესაბამისობის სახეობებიდან, ფუნქციის გრაფიკი, ფუნქციის მოცემის ხერხები). მათი გამოყენება აადვილებს ფუნქციის თვისებების გააზრებას. ამასთანავე, ყოველი თვისების აღწერა კონკრეტული მაგალითების საშუალებით მიმდინარეობს. ყურადღებას ვამახვილებთ ყოველი თვისების მნიშვნელოვან მომენტებზე; ზრდადობა, კლებადობა, მუდმივობა რიცხვით სიმრავლეზე განიხილება და არსებითია განსაზღვრებათა ერთნაირი სტრუქტურა — აღნიშნული სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისთვის პირობას, რომელსაც ეს წერტილები აკმაყოფილებს, მოსდევს პირობა, რომელსაც ამ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობები აკმაყოფილებს. ვინაჩუნებთ იმ განსაზღვრებებს (ზრდადობის, კლებადობის, მუდმივობის), რომელიც უკვე დამკვიდრებული იყო ჩვენს სკოლაში.

განსაზღვრულია ნულების, დადებითობის და უარყოფითობის შუალედების, მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების ცნებები. უნდა გავარჩიოთ — მაქსიმუმის წერტილი ფუნქციის მაქსიმუმისგან, მინიმუმის წერტილი — ფუნქციის მინიმუმისგან. ძალიან მნიშვნელოვანია ჩვენი შენიშვნა მოსალოდნელი შეცდომების თავიდან აცილების შესახებ.

„ტესტებისა“ და ამოცანების ამოხსნით მიმდინარეობს ცოდნის განმტკიცება ფუნქციის თვისებების შესახებ.

„ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა მოითხოვს ფუნქციის ნულის, მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილების, ნიშანმუდმივობის შუალედების განსაზღვრებების ცოდნას.

6, 7 ამოცანებში მოსწავლემ უნდა შეძლოს გრაფიკის აღწერა — გრაფიკის „ნაკითხვა“; გრაფიკის აღწერის მიხედვით ამ გრაფიკის შესაძლო გეომეტრიული გამოსახულების წარმოდგენა.

8 $f(x)=x^2-1$ ფუნქციის ნულებია -1 და 1 წერტილები.
 $x^2-1>0$,
 $|x|>1$

$x>1$, ან $x<-1$. მაშასადამე, $(-\infty; -1)$ და $(1; +\infty)$ შუალედები დადებითობის შუალედებია; $(-1; 1)$ შუალედი კი — უარყოფითობის შუალედი.

9 ვიღებთ ნებისმიერ ორ დადებით რიცხვს, x_1 და x_2 . ვთქვათ, $x_2>x_1$, მაშინ $x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$. ე. ი. $x_2^2>x_1^2$. მაშასადამე, $(0; +\infty)$ ფუნქციის დადებითობის შუალედი.

ვთქვათ, x_1 და x_2 უარყოფითი რიცხვებია, $x_2>x_1$.

რადგან $x_2>x_1$, ამიტომ $x_2-x_1>0$; რადგან $x_2<0$, $x_1<0$, ამიტომ $x_2+x_1<0$

მაშასადამე, $x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$, $x_2^2<x_1^2$.

$y=x^2$ -ის კლებადობის შუალედი $(-\infty; 0)$.

10 ა) თუ $x_2>x_1$, მაშინ $-x_2<-x_1$, $-3x_2<-3x_1$, $2-3x_2<2-3x_1$, $f(x_2)<f(x_1)$.

მაშასადამე, $f(x)=2-3x$ კლებადი ფუნქციაა, კლებადობის შუალედი $(-\infty; +\infty)$.

ანალოგიურად, ვაჩვენებთ, რომ $f(x) = \frac{3}{5} + \frac{4}{7}x$ ზრდადია, ხოლო $f(x) = -0,2x - 3,5$ — კლებადია. შეიძლება ეს პასუხები მოსწავლეებმა გრაფიკების აგებითაც მიიღონ.

შეიძლება მოსწავლეებმა შენიშნონ, რომ 10 ამოცანაში წარმოდგენილი სამივე შემთხვევაში წრფის განტოლებებია მოცემული და მათი გრაფიკების დახრის მიხედვითაც იმსჯელონ.

11 ა) $f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$.

თუ $x_1 < -1$, $x_2 < -1$ და $x_2 > x_1$, მაშინ

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - 3x_2 - x_1^3 + 3x_1 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) - 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 - 3).$$

რადგან $x_1 < -1$ და $x_2 < -1$, ამიტომ $x_1^2 > 1$, $x_2^2 > 1$, $x_1x_2 > 1$, საიდანაც $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$.

ამასთანავე, $x_2 > x_1$. მაშასადამე, $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x)$ ზრდადია $(-\infty; -1)$ შუალედზე.

ბ) ვთქვათ, $f(x) = x^4 + 27x$ და $x_2 > x_1 \geq 0$, მაშინ

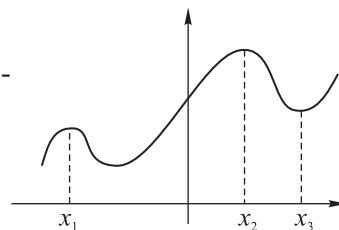
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^4 + 27x_2 - x_1^4 - 27x_1 = (x_2 - x_1)(x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) + 27(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)((x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 27) > 0. \end{aligned}$$

$f(x)$ ზრდადია.

12 ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება იყოს სურათზე წარმოდგენილი ფორმის:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

x_1 და x_2 მაქსიმუმის წერტილებია, x_3 — მინიმუმის.



საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია.

მაგალითად, 5 და 4 „ტესტები“ ერთი და იმავე განსაზღვრების გამოყენებას მოითხოვს. მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების განსაზღვრების თანახმად, იმ შუალედის ყოველ წერტილში, რომელშიც ფუნქცია მუდმივია, გვაქვს მაქსიმუმის წერტილიც და მინიმუმის წერტილიც. ეს განსაზღვრება 50 წელია ჩვენ სკოლაში მოქმედებს და ჩვენ არ შევცვალეთ.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

13 თუ $f(x) = x^4 - 8x$, x_1 და x_2 $[2; +\infty)$ -ის წერტილებია და $x_2 > x_1$, მაშინ

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^4 - 8x_2 - x_1^4 + 8x_1 = (x_2 - x_1)(x_2^3 + x_2^2x_1 + x_2x_1^2 + x_1^3) - 8(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)((x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 8) \end{aligned}$$

თუ $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, მაშინ $x_1^2 \geq 4$, $x_2^2 \geq 4$ და $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) > 8$.

მაშასადამე, $f(x_2) > f(x_1)$. $y = x^4 - 8x$ ზრდადია $[2; +\infty)$ შუალედში.

მოისაზრე

ამ რუბრიკით წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც მასწავლებელმა შეიძლება მაღალი მზაობის მოსწავლეებთან დიფერენცირებული სწავლებისას გამოიყენოს. ამასთანავე, ამოხსნების განხილვა შეიძლება კლასში ყველა მოსწავლის მონაწილეობით ჩატარდეს.

1 შეიძლება განვიხილოთ რიცხვითი ტოლობა, რომელიც მიიღება $x=0$ მნიშვნელობის ჩასმით: $-f(-1)=0+f(0)$, $f(0)=-f(-1)$.

თუ $x=-1$, მაშინ გვაქვს: $-2f(0)=-1+f(-1)$.

მაშასადამე,

$$\begin{cases} 2f(0)=-2f(-1) \\ -2f(0)=-1+f(-1) \\ 0=-f(-1)-1 \\ f(-1)=-1. \end{cases}$$

2 მასწავლებელმა შეიძლება იცოდეს, რომ უმაღლეს ალგებრაში ამ თვისების ფუნქციას წრფივი ფორმა ეწოდება. რიცხვითი ფუნქციების შემთხვევაში, მოცემულ პირობას აკმაყოფილებს $y=kx$ ფორმულით მოცემული ფუნქცია:

$$f(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)=kx_1+kx_2=f(x_1)+f(x_2).$$

3 თუ $x=1$, მაშინ მივიღებთ: $f(x)=f(x)+f(1)$, მაშასადამე, $f(1)=0$.

თუ $x_1=2023$, $x_2=\frac{1}{2023}$, ამასთანავე, $f(\frac{1}{2023})=1$, მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(2023) + f(\frac{1}{2023}), \\ f(2023) &= -1. \end{aligned}$$

4 თუ x_0 საერთო ნულია, მაშინ

$$\begin{cases} x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0 \\ x_0^3 + ax_0 = 0. \end{cases} \text{ ცხადია } x_0 \neq 0, \text{ ამიტომ}$$

$$\begin{cases} x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0 \\ x_0^4 + ax_0^2 + x_0 = 0, \end{cases} \text{ საიდანაც } x_0 = 1.$$

მაშასადამე, $1+a+1=0$, $a=-2$.

5 ვთქვათ, $f(\frac{3x-1}{x+2}) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

ვთქვათ, $\frac{3x-1}{x+2} = t$, მაშინ $3x-1 = tx+2t$, $x(3-t) = 1+2t$,

$$x = \frac{1+2t}{3-t};$$

მაშასადამე, $f(t) = \frac{\frac{1+2t}{3-t} + 1}{\frac{1+2t}{3-t} - 1} = \frac{t+4}{3t-2}$. ანუ, $f(x) = \frac{x+4}{3x-2}$.

6 ა) $f(x+1) = \begin{cases} \frac{x-3}{2}, & \text{თუ } x < -2 \\ x^2 + 2x, & \text{თუ } -2 \leq x \leq 2 \\ 5x-1, & \text{თუ } x > 2 \end{cases}$

თუ $f(x+1) = -4$, მაშინ გვექონია მხოლოდ ეს შემთხვევა:

$$f(x+1) = \frac{x-3}{4} \text{ და } x = -5.$$

$$b) f(x+1) = \begin{cases} \frac{3x-3}{2}, & \text{თუ } x < -\frac{2}{3} \\ 9x^2+6x, & \text{თუ } -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 15x-1, & \text{თუ } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

თუ $f(3x+1)=3$, მაშინ შესაძლებელია მხოლოდ $9x^2+6x=3$, საიდანაც $x=-1$ ან $x=\frac{1}{3}$.
პირველი მნიშვნელობა არ ეუთვნის $[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$ შუალედს, მეორე — ეკუთვნის.
პასუხი: $x=\frac{1}{3}$.

გ) წინა ორი შემთხვევის ანალოგიურად, მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(x+7) &= 5(x+7)-6 \\ 5(x+7)-6 &= 14 \\ 5(x+7) &= 20 \\ x+7 &= 4 \\ x &= -3, \text{ მაშინ } x+7 > 3. \end{aligned}$$

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

მითითებები:

① არის თუ არა დამოკიდებულება ფუნქცია? დამოკიდებულების სიტყვიერი აღწერის მიხედვით, მოსწავლე მსჯელობს, A სიმრავლის ყოველ ელემენტს უნდა შეესაბამებოდეს B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი.

ა) დარღვეულია პირობა — A -ს ყოველ ელემენტს არ შეესაბამება B -ს ელემენტი (მაგალითად, უარყოფით რიცხვს).

ბ) აქ ყოველ $x \in A$ რიცხვს შეესაბამება B -დან წესიერი სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრი x რიცხვია (გვერდი იქნება $\frac{x}{3}$). $\frac{x}{3}$ სმ-ის ტოლი სიგრძის გვერდის მქონე სამკუთხედი ერთადერთია, რადგან ტოლ სამკუთხედებს არ განვასხვავებთ; ფაქტობრივად, გვაქვს შესაბამისობა დადებით რიცხვებსა და წესიერი სამკუთხედების კლასს შორის (ტოლი სამკუთხედები „გაიგივებულია“ ტოლობის მიმართების მიმართ).

③ როგორის ფართობი: $\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(3r_1)^2 - \pi r_1^2 = 8\pi r_1^2$; $2r_1 = a$, $r_1 = \frac{a}{2}$, $S = 2\pi a^2$.

④ $f(0) = -\frac{15}{3} = -5$; გადაკვეთის წერტილია: $B(0; -5)$.

⑤ $D(g) = (-\infty; -\frac{7}{5}) \cup (-\frac{7}{5}; +\infty)$;
 $g = \frac{3x}{5x+7}$, $5gx+7g=3x$
 $7g=x(3-5g)$
 $x = \frac{7g}{3-5g}$
 $E(g) = (-\infty; \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$.

8) $8x^5 - 8x^3 - x^2 + 1 = 0$
 $8x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0$
 $(x^2 - 1)(8x^3 - 1) = 0$
 ნულები: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{2}$.
 $1 + (-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

10) $P(x) = x^2 - 40x - 1200$
 $P(x) = (x - 20)^2 - 1600$
 ნამგებია, როცა $(x - 20)^2 - 40^2 < 0$, $|x - 20| < 40$,
 $x > 0$, $x - 20 < 40$;
 $x < 60$.
 ბ) $x = 61$.

კომპლექსური დავალება

მოსწავლემ უნდა მოიძიოს მასალა ელექტროენერგიის მნიშვნელობის შესახებ. ელექტროენერგიის იმპორტის ცვლილების შესახებ; რა არის ელექტროენერგია, რა ერთეულებში იზომება ელექტროენერგია — ამ კითხვებზე პასუხებს უნდა შეიცავდეს მოსწავლის მიერ შესრულებული სამუშაო.

ამასთანავე, მითითებული უნდა იყოს ელექტროენერგიის ის რაოდენობა, რომლის გამომუშავებასაც საქართველო საკუთარი შესაძლებლობით ახერხებს, ამ რაოდენობის პროცენტული წილი საერთო მოხმარებაში. იყენებს თუ არა საქართველო განახლებად ენერგიას (აქ არის მზის, ჰიდროელექტროსადგურების, ქარის ენერგია); მოსწავლე უნდა შეეხოს განახლებადი ენერგიის მოპოვების მნიშვნელობას (გარემოს ნაკლებ ზიანს აყენებს). განახლებადი ენერგია საშუალებას გვაძლევს დავაკმაყოფილოთ გაზრდილი მოთხოვნა ისე, რომ გარემოს მინიმალური ზიანი მიაღდეს.

საზგასმული უნდა იყოს წყლის ენერგიის გამოყენების მნიშვნელობა ელექტროენერგიის მისაღებად. შეიძლება წარმოადგინონ მონაცემები ჩვენი ყველაზე ძლიერი ჰიდროელექტროსადგურის შესახებ, რომელიც სიმაღლით (≈ 271 მეტრი) მსოფლიოში მეექვსეა. შეიძლება ვისაუბროთ წყლის ენერგიის სხვა სახეებზე (წყალსაცავებიდან ტალღური ენერგიის მიღება). მოსწავლემ შეიძლება მოიძიოს ინფორმაცია ქარის ელექტროსადგურების შესახებ (როდის აიგო საქართველოში პირველი ქარის ელექტროსადგური?).

შეიძლება დავახასიათოთ ელექტროენერგიის მოხმარების მოცულობით გამორჩეული ქვეყნები. ერთ მოსახლეზე მოხმარებული ელექტროენერგიის რაოდენობის მიხედვით, საქართველო მსოფლიოში რომელ ადგილზეა? შეიძლება არაგანახლებადი ენერგიის წყაროების (მაგალითად, ბუნებრივი აირი, ნავთობი, ქვანახშირი) შესახებ ინფორმაციის მოგროვება. შეიძლება საუბარი შენობების სითბოდამცველი ღონისძიებების მნიშვნელობის შესახებ.

მნიშვნელოვანია ელექტროენერგიის მოხმარების საფასურის გადახდის იმ საფეხუროვანი სისტემის ანალიზი, რომელიც საქართველოშია შემოღებული. მოიძიეთ უახლესი ინფორმაცია თქვენს რეგიონში არსებული ტარიფების შესახებ. მოსწავლემ უნდა შეძლოს ამ სისტემის წარმოდგენა ფუნქციის სახით — x კილოვატსაათში გადასახდელი თანხა x -ის ფუნქციაა, ვთქვათ $f(x)$. მოსწავლემ უნდა შეძლოს $f(x)$ -ის ფორმულებით ჩანერა.

IX თავის დამატებითი ამოცანები

„მოისაზრეს“ ამოცანები მაღალი მზაობის მოსწავლეებთან მუშაობისთვისაა განკუთვნილი. დამატებითი ამოცანები კი გამოიყენეთ მთელ კლასში (დიფერენცირებული სწავლების დროსაც).

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

4) თუ $f(2x+3)=x-1$, მაშინ $f(x)=\frac{x-3}{2}-1$, $f(x)=\frac{x-5}{2}$, $f(5)=\frac{5-5}{2}=0$.
 $f(5)$ შეიძლება ასეც ვიპოვოთ:
 $2x+3=5$, $2x=2$, $x=1$, $f(5)=1-1=0$.

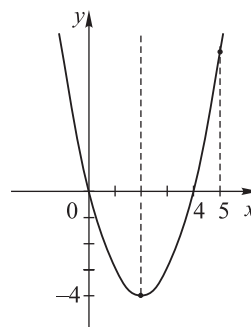
7) $\frac{|x|}{x}=1$, თუ $x>0$;
 $\frac{|x|}{x}=-1$, თუ $x<0$;
 $D(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
 $E(y)=\{-1; 1\}$.

8) $y=\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1-2}{2x+1}=1-\frac{2}{2x+1}$;
 $D(y)=(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$
 $x=\frac{y}{2(1-y)}$
 $E(y)=(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

10) $f(x)=[x]$,
 $f(5,2)=5$; $f(-3,2)=-4$.
 $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=\mathbf{Z}$.

11) $f(x)=\{x\}$.
ა) $f(2,3)=0,3$; $f(2)=0$; $f(0,8)=0,8$; $f(-0,8)=0,2$.
ბ) $D(f)=\mathbf{R}$; $E(f)=[0;1)$.
გ) თუ $f(x)=0,2$; მაშინ $x=k+0,2$; სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

14) $x^2-4x=0$
 $x_1=0$, $x_2=4$
 $x(x-4)>0$
 $\begin{cases} x>0 \\ x-4>0 \end{cases}$ ან $\begin{cases} x<0 \\ x-4<0 \end{cases}$
 $x>4$ ან $x<0$.



ა) ნულებია 0 და 4;
ბ) ზრდადობა: $[2; +\infty)$, კლებადობა: $(-\infty; 2]$;
გ) დადებითია: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, უარყოფითია: $(0; 4)$;
დ) უდიდესი მნიშვნელობა: $5^2-4\cdot 5=5$, უმცირესი: $2^2-4\cdot 2=-4$.

15) $A=(-3; 2)$, $B=(2; y)$, $C=(6; 6)$.
 $\sqrt{(6-2)^2+(6-y)^2}=5$
 $25-16=(6-y)^2$
 $6-y=3$ ან $6-y=-3$. ვირჩევთ $y=3$, შესაბამისად, $B(2; 3)$.

შემაჯავებელი ნაშრომი

თემა: ალგებრა და კანონზომიერებები.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: ფუნქცია, ფუნქციის თვისებები.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სხვადასხვა ხერხით მოცემული ფუნქციის „ნაკითხვა“ — თვისებების დადგენა: ფუნქციის განსაზღვრის არის და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა; ფუნქციის ნულების და ნიშანმუდმივობის შუალედებების დადგენა.

ამოცანების ნიმუშები

ამოხსენით ამოცანები

① ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

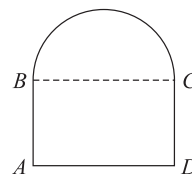
x	-1	0	1	2	4	9	10
$f(x)$	2	3	0	0	1	5	10

ა) იპოვეთ $f(0)+f(2)+f(10)$;

ბ) იპოვეთ x , თუ $f(x)=1$;

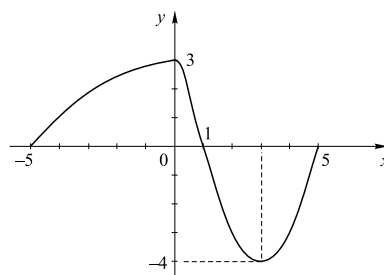
გ) ამოხსენით განტოლებები: $f(2x-3)=5$; $f(x+2)=0$.

② სურათზე გამოსახული ფიგურა შედგება $ABCD$ მართკუთხედისგან და ნახევარწრისგან BC დიამეტრით. მთელი ფანჯრის პერიმეტრი 20 მეტრია. გამოსახეთ მისი ფართობი x -ით (x ნახევარწრის რადიუსია, გაზომილი მეტრებში).



③ იპოვეთ $y=\sqrt{4x^2-9}+3$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობა სიმრავლე.

④ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ მისი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



⑤ ვთქვათ, $y=f(x)$ მე-4 (წინა) დავალებაში გრაფიკით წარმოდგენილი ფუნქციაა. ამოხსენით განტოლება: $f(2x-5)=0$.

⑥ $y=g(x)$ ფუნქცია ყოველ მთელ რიცხვს შეუსაბამებს 9-ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს.

ა) გამოვალეთ $f(17)$, $f(100)$, $f(30596)$, $f(0)$, $f(9)$, $f(-20)$.

ბ) დაასახელეთ x -ის სამი ისეთი მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $f(x)=5$.

⑦ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{როცა } x \leq 0 \\ x^2-1, & \text{როცა } 0 < x < 2 \\ x+2, & \text{როცა } x \geq 2. \end{cases}$$

გამოთვალეთ $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(5)$.

⑧ ვთქვათ, $f(2x+3)=x^2+x$.

ა) გამოთვალეთ $f(5)$, $f(0)$;

ბ) რა ფორმულით მოიცემა $y=f(x)$?

⑨ იპოვეთ $y=10-3x$ ფუნქციის დადებითობის შუალედი. ააგეთ მისი გრაფიკი.

⑩ იპოვეთ $y=5x^3+11x^2-12x$ ფუნქციის ნულები.

პასუხები: ① ა) 13; ბ) $x=4$, გ) $x=6$; $x=-1$ ან $x=0$. ② $S=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+20x$ (მ²).

③ $D(f)=[-1,5; 1,5]$; $E(f)=[3; +\infty)$. ④ $D(f)=[-5; 5]$. $E(f)=[-4; 3]$.

⑤ $x=0$; $x=3$; $x=5$. ⑥ ა) 8; 1; 5; 0; 7; ბ) მაგალითად, 14; 32; 5.

⑦ 6. ⑧ ა) $f(5)=2$; ბ) $f(0)=\frac{3}{4}$; გ) $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-4x+3)$. ⑨ $(-\infty; \frac{10}{3})$.

⑩ $x=-3$; $x=0,8$; $x=0$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა

① ა) დავალების შესრულება შევაფასოთ 0,5 ქულით, ბ) დავალების შესრულებაც — 0,5 ქულით; გ) დავალების შესრულებისას $2x-3=9$ განტოლების დადგენისა და მისი ამოხსნისთვის — 1 ქულით; ბოლო განტოლების ამოხსნა შევაფასოთ 1 ქულით, თუ იპოვა ორივე ამონახსნი ($x+2=1$ და $x+2=2$ განტოლებების), მხოლოდ ერთი ამონახსნის პოვნა — 0,5 ქულით. სულ — 3 ქულა.

② გამოსახა ფიგურის პერიმეტრი და ფართობი ორი ცვლადის (x და AB) საშუალებით, შეფასდეს 1 ქულით, კიდევ 1 ქულა დაენეროს, თუ პერიმეტრის ფორმულიდან AB გამოსახა x -ით, ჩასვა ფართობის ფორმულაში და გაამარტივა. სულ — 2 ქულა.

③ $4x^2-9 \geq 0$ უტოლობის ჩანერა შეფასდეს 0,5 ქულით; კიდევ 0,5 ქულა დაენეროს მისი ამოხსნისთვის (განსაზღვრის არის დადგენისთვის). ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის ჩანერისთვის მოსწავლეს კიდევ 1 ქულა დაენეროს. სულ — 2 ქულა.

④ განსაზღვრის არის დადგენა შეფასდეს 0,5 ქულით, მნიშვნელობათა სიმრავლის — 0,5 ქულით. სულ — 1 ქულა.

⑤ თუ მოსწავლემ $2x-5=-5$, $2x-5=1$ ან $2x-5=5$ განტოლებებიდან რომელიმე დაწერა და ამოხსნა, შეფასდეს 1 ქულით. სამივე ამ განტოლების დაწერა და ამოხსნა შეფასდეს მაქსიმალური 2 ქულით.

⑥ ა) ფუნქციის 6 მნიშვნელობიდან ზოგიერთის პოვნა შეფასდეს 0,5 ქულით, ყველა მნიშვნელობის გამოთვლა — 1 ქულით; ბ) დავალების შესრულებისთვის დაენეროს კიდევ 1 ქულა, სულ — 2 ქულა.

⑦ ხუთი შესაკრებიდან მხოლოდ ზოგიერთის სწორად გამოთვლა შეფასდეს 1 ქულით; დავალების სწორად შესრულება — მაქსიმალური 2 ქულით.

⑧ ა) დავალებაში გამოსათვლელი ორი სიდიდიდან თითოეულის გამოთვლა შეფასდეს 0,5 ქულით; ბ) დავალებაში $2x+3=t$ აღნიშვნის შემოტანა — 0,5 ქულით, $y=f(x)$ ფუნქციის აღდგენა — კიდევ 0,5 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑨ დადებითობის შუალედის პოვნა შეფასდეს 1 ქულით, გრაფიკის აგება — კიდევ 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑩ ნულების საპოვნელად განტოლების შედგენა, x -ის ფრჩხილებს გარეთ გატანა შეფასდეს 1 ქულით; კიდევ 1 ქულა დამატოს განტოლების ამოხსნისთვის და პასუხის დაფიქსირებისთვის. სულ — 2 ქულა.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულის დადგენისთვის საკმარისია მოსწავლის მიერ მიღებული ქულების 2-ზე გაყოფა და შედეგის დამრგვალება ერთეულის სიზუსტით.

ამ განსაზღვრული შეფასების შემდეგ თქვენ მოგიწევთ განმავითარებელ შეფასებაზე ზრუნვა. ეს მნიშვნელოვანი აქტივობა არსებითად შეავსებს აღმოჩენილ ხარვეზებს, გააღრმავებს მოსწავლეთა ცოდნას და შეაჯამებს გარკვეულ ეტაპს მოსწავლეთა საგანმანათლებლო პროცესში. გთავაზობთ გარკვეულ რეკომენდაციებს ამ აქტივობის დაწყების წინ, რომელთაც თქვენ, იმედია, დააკონკრეტებთ შემაჯამებელი წერის შედეგებისა და კლასის სპეციფიკის გათვალისწინებით. ძირითადი რეკომენდაციაა: მაქსიმალური ყურადღებით განიხილეთ თემასთან დაკავშირებულ სამიზნე ცნებათა შინაარსი და კვლევის მეთოდების არსი. აქტივობა ჩატარეთ ინტერაქტიულად, კლასის მაქსიმალური ჩართულობით.

①, ③, ④ და ⑤ ამოცანების განხილვისას იმსჯელეთ ფუნქციის მოცემის ხერხებზე, ფუნქციის განსაზღვრის არესა და მნიშვნელობათა სიმრავლეზე, განტოლების ამოხსნის გზებზე. დასვით შეკითხვა:

ცხრილით მოცემისას შეიძლება თუ არა $(x, f(x))$ წყვილების ჩამონათვალში x -ის მნიშვნელობა მეორდებოდეს?

საკოორდინატო სიბრტყეზე ნებისმიერი წირი შეიძლება თუ არა იყოს რაიმე ფუნქციის გრაფიკი? აღწერეთ: რამდენ წერტილში შეიძლება კვეთდეს წირს Ox -ის მართობული წრფე, რომ ეს წირი რაიმე ფუნქციის გრაფიკი იყოს?

② ამოცანის განხილვისას მიმართეთ კლასს გაიხსენონ წრწინის სიგრძის, მართკუთხედის პერიმეტრის, წრის ფართობისა და მართკუთხედის ფართობის ფორმულები.

⑥ ამოცანის განხილვისას მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები ნაშთით გაყოფის შესახებ. საილუსტრაციოდ განიხილეთ მთელი დადებითი და მთელი უარყოფითი რიცხვების ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები. შეიძლება თუ არა, რომ გაყოფისას მიღებული ნაშთი იყოს უარყოფითი? განიხილეთ, 4-ის, 30-ის, -5-ის, -13-ის 10-ზე გაყოფისას რა ნაშთი მიიღება?

⑦ ამოცანაში არგუმენტების დასახელებისას აქცენტი გაკეთდეს ფუნქციის წარმომდგენ სათანადო ფორმულის შერჩევაზე.

⑥ ამოცანის (და ანალოგიური სახის ამოცანების) განხილვისას მოისმინეთ მოსწავლეთა მოსაზრებები მარტივი გზით ამოცანის გადაჭრაზე. მოცემულ ამოცანაში რა აღნიშვნა გაამარტივებდა ამოცანის გადაჭრას?

9 და 10 ამოცანების განხილვისას დაუბრუნდით ფუნქციის ნიშანმდმივობის (დადებითობის, უარყოფითობის), ზრდადობა-კლებადობის, ფუნქციის ნულების ცნებებს. მოიყვანეთ საილუსტრაციო მაგალითები.

ამ განმავითარებელი შეფასების დასასრულს მოისმინეთ მოსწავლეთა მიერ გამოთქმული მოსაზრებები, მათი დამოკიდებულება ამ საკითხების მიმართ, მათი აზრი ამ საკითხების შესახებ გამოყენებების შესახებ. ჩაინიშნეთ საყურადღებო მოსაზრებები, შენიშნული სირთულეები და გაითვალისწინეთ ისინი შემდგომი აქტივობების დაგეგმვისას.

თავის შემაჯამებელი წერის შედეგების მიხედვით თქვენ უკეთ დააკონკრეტებთ მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევის ხარისხს სოლო ტაქსონომიის დონეების მიხედვით.

პრესტრუქტურული დონე. არამკაფიო წარმოდგენა აქვს ძირითად სამიზნე ცნებებზე, ვერ აღიქვამს ფუნქციის ცნების არსი. ფუნქციის მოცემის ხერხები. აქვს ცდები ფორმულით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლის — მეტწილად ხარვეზიანი.

უნიტრუქტურული დონე. უჭირს ფუნქციის ცნების მკაფიოდ აღწერა, განსაზღვრის არის და მნიშვნელობათა სიმრავლეების დადგენისას უშვებს შეცდომებს, გრაფიკის განხილვისას სწორად უთითებს ნიშანმდმივობისა და ზრდადობა-კლებადობის შუალედებს.

მულტისტრუქტურული დონე. კარგად აქვს გააზრებული ფუნქციის ცნება. შექცეული ფუნქციის ცნება არამკაფიოდ აქვს გააზრებული. ფუნქციის აღწერას გრაფიკისა და ცხრილის მიხედვით მალალ დონეზე ახდენს. ძირითადად, დაძლეული აქვს ფორმულით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენის ამოცანის სირთულეები.

მიმართებითი დონე. სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ყველა საკითხი აქვს გააზრებული. ხსნის წარმოდგენილ ამოცანებს კლასში განხილული ამოცანების მიხედვით. აღწერს ფუნქციის გრაფიკებს, ადგენს ფუნქციის განსაზღვრის არეს. თავისი შედეგების გადმოცემისას მეტ დამაჯერებლობაზე უნდა იმუშაოს.

გაფართოებული აბსტრაქტული დონე. მოსწავლეს ღრმად აქვს გააზრებული ფუნქციის ცნება და მასთან დაკავშირებული ცნებები. მკაფიოდ წარმოაჩენს შექცეული ფუნქციის ცნებას და აღწერს მისი არსებობის პირობებს. იყენებს სწორ ნოტაციას. მიღებულ შედეგებს ხსნის დამაჯერებლად, დასმული ამოცანების კვლევისას ახერხებს მათ განზოგადებას და მათი გადაჭრის გზებსაც სახავს.

X თავე

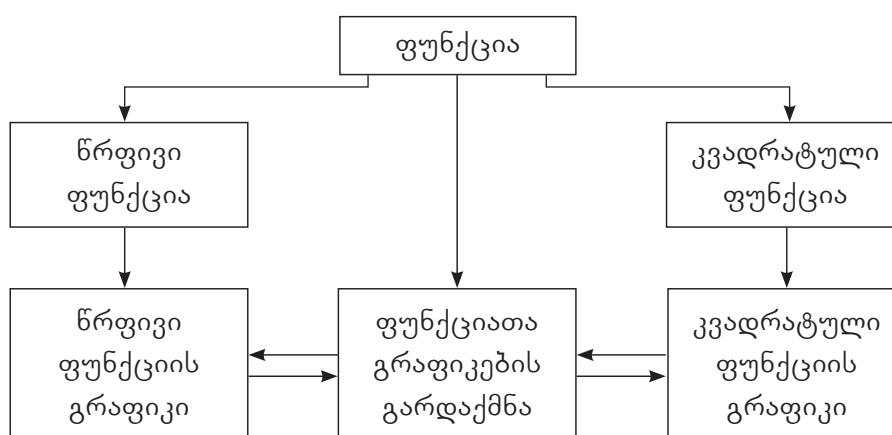
გავიღრმავოთ ცოდნა წრფივი და კვადრატული ფუნქციების შესახებ

თემა: ალგებრა და კანონზომიერება საათების სავარაუდო რაოდენობა: 20 სთ			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: წრფივი ფუნქცია, კვადრატული ფუნქცია			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხები	საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება
შესაბამისობა, გრაფიკი, ფუნქცია; სიდიდეებს შორის კავშირი შეიძლება აღვწეროთ წრფივი ფუნქციით; სიდიდეებს შორის კავშირი შეიძლება აღვწეროთ კვადრატული ფუნქციით; წრფივი ფუნქცია სხვა ფუნქციებს შორის „გამოიყოფა“ მახასიათებელი თვისებით, რომელიც აღწერს ამ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს; კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი არის პარაბოლა, რომლის აგება შეიძლება $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკისგან გარდაქმნის წესების გამოყენებით	წრფივი ფუნქცია, წრფივი ფუნქციის გრაფიკი; წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისება; წრფივი ფუნქციის გრაფიკის გამოყენება სიდიდეებს შორის კავშირის სტატისტიკური აღწერისას	რა არის წრფივი ფუნქციის გრაფიკი? რა არის წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისება? ფუნქციის გრაფიკის რა გარდაქმნები შეიძლება გამოვიყენოთ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებისას?	წრფივი და კვადრატული ფუნქციის ზოგიერთი გამოყენება

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეებს შორის კავშირის დამყარება და წარმოდგენა წრფივი ან კვადრატული ფუნქციით; წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისება; წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისების დასაბუთება და გამოყენება; კვადრატული ფუნქციის თვისებებისა და გრაფიკის გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა).

მე-10 თავი წრფივი და კვადრატული ფუნქციის თვისებების აღწერის გამეორებასა და მათთან დაკავშირებული ცოდნის გაღრმავებას ეძღვნება. წრფივი ფუნქციის თვისებების გამოყენებით, შესწავლილია საკოორდინატო სიბრტყეზე წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის პირობები. განხილულია პრაქტიკული ამოცანები, რომლებიც წრფივი, ან კვადრატული ფუნქციის თვისებებისა და გრაფიკების გამოყენებით განიხილება.

მე-10 თავში წარმოდგენილი მასალა, ურთიერთკავშირების გათვალისწინებით, შეიძლება შემდეგი სქემით აღვწეროთ.



§10.1. წრფივი ფუნქცია. თვისებები. გრაფიკი

წრფივი ფუნქცია ფუნქციის (სამიზნე ცნება) ცნების კერძო სახეა; საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია აღნიშნულ სამიზნე ცნებასთან, აღიწერება ცხოვრებისეული პრაქტიკული მაგალითებით. ამ მაგალითების განხილვამდე ვააქტიურებთ წინარე ცოდნას; ვიყენებთ ინტერაქტიულ ფორმას და კლასი იმეორებს ფუნქციის მნიშვნელოვან თვისებებს: შესაბამისობას სიმრავლეებს შორის, როცა ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს მეორე სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება, მონოტონურობას, ნიშანმუდმივობის შუალედებს, ფუნქციის მოცემის ხერხებს, ფუნქციის გრაფიკს. მნიშვნელოვანია ფუნქციის გრაფიკის გააზრება — იმ წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე, რომლებიც ფუნქციის განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის მიხედვით მოიცემა. ეს საკითხი უკავშირდება პარაგრაფის ერთ-ერთ მიზანს — მოსწავლემ შეძლოს, დაამტკიცოთ, რომ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე. დამტკიცების პროცესიც გრაფიკის სწორ გააზ-

რებას უკავშირდება — წრფივი ფუნქციის გრაფიკი ის წრფეა, რომლის წერტილების x და y კოორდინატები აკმაყოფილებს მოცემული წრფივი ფუნქციის ფორმულას ($y=kx+l$), ხოლო იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიც აღნიშნულ წრფეს არ ეკუთვნის — არ აკმაყოფილებს.

დასაბუთების პროცესში მონაწილეობას იღებს კლასის ყველა მოსწავლე; ჩვენი დახმარებით, მოსწავლეები იხსენებენ სამკუთხედების მსგავსების ნიშნებს.

ცოდნის განმტკიცება „ტესტებისა“ და ამოცანების გამოყენებით მიმდინარეობს. საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემით, ვაჯამებთ მუშაობას. განხილულია ორი შემთხვევა, როცა $y=kx+l$ ფორმულაში $k=0$, მაშინ გრაფიკი Ox ღერძის პარალელური წრფეა; ეს წრფე გადის $(0; l)$ წერტილზე; თუ $k \neq 0$, მაშინ გვაქვს წრფე, რომელიც გადის $(0; l)$ და $(1; k+l)$ წერტილებზე; თუ $k > 0$, ფუნქცია ზრდადია, თუ $k < 0$, ფუნქცია კლებადია.

ტექსტში განხილული მაგალითებისა და საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გააზრება ეხმარება მოსწავლეებს ①–⑦ „ტესტებში“ სწორი პასუხის შერჩევაში.

⑧ შევარჩიოთ, მაგალითად, (2019; 2300) და (2021; 2800) წერტილები. პირობის თანახმად, თუ დამოკიდებულება აღინერება $y=kx+l$ ფორმულით, მაშინ

$$\begin{cases} 2800=2021k+l \\ 2300=2019k+l \end{cases}$$

$$2k=500, \quad k=250, \quad l=-502\,450$$

$$y=250x-502\,450$$

თუ $x=2025$, $y=250 \cdot 2025 - 502\,450$;
 $y=3800$.

⑨ $k=-6$, ფუნქციის განტოლებაა

$$y=-6x+l,$$

$$-4=18+k;$$

$$l=-22;$$

$$y=-6x-22.$$

შევნიშნოთ, რომ წრფივი ფუნქცია, რომლის გრაფიკი გადის მოცემულ (a, b) წერტილზე და მოცემული k დახრის მქონეა, შეიძლება ასეც წარმოვადგინოთ: $y-b=k(x-a)$. მართლაც, ამ განტოლებას (წრფივს) აკმაყოფილებს (a, b) კოორდინატები და გრაფიკის დახრას k . ამ კონკრეტულ ამოცანაში დავწერთ $y+4=-k(x+3)$, ანუ, $y=-6x-22$.

⑪ ამოცანა მაგალითებში განხილული ამოცანების ანალოგიურად იხსნება:

ა) პირობის თანახმად, თუ y -ით აღვნიშნავთ x -ლიტრის შესაბამის გადასახდელ თანხას, მაშინ გვექნება გადახდის სამი ვარიანტი: (a), (b) და (c).

$$y=3,3x+2500 \text{ (a); } \quad y=3,5x+1500 \text{ (b); } \quad y=3,9x \text{ (c).}$$

შესაბამისი გრაფიკები იკვეთება წერტილებში:

(b) და (c) — (3750; 14625)
 (a) და (b) — (5000; 19000).

მაშასადამე, თუ $x \leq 3750$, მაშინ, ცხადია, მიზანშეწონილია ყოველი ლიტრის 3,9 ლარად შეძენა — (c)-ს გრაფიკი სხვა გრაფიკებზე ქვემოთაა. თუ $3750 < x \leq 5000$, მაშინ მიზანშეწონილია წინასწარ 1500 ლარის გადახდა და ყოველი ლიტრის 3,5 ლარად შეძენა — ამ

შემთხვევაში „ქვედა“ გრაფიკი (b) წრფეა. თუ $x > 5000$, მაშინ მიზანშეწონილია 2500 ლარის წინასწარ გადახდა და ყოველი ლიტრის 3,3 ლარად შეძენა — „ქვედა“ გრაფიკი (a) წრფეა.

13) თუ დახრა დადებითია, ფუნქცია ზრდადია, თუ დახრა უარყოფითია, ფუნქცია კლებადია. გრაფიკის ასაგებად, საკმარისია მისი ორი წერტილის პოვნა.

14) და 15) ამოცანები მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის კავშირის განხილვას ეხება. ეს საკითხი პირველ სემესტრში იყო განხილული, შემოდებული იყო კორელაციის კოეფიციენტი, რომელიც აღწერდა სიდიდეების ორ ერთობლიობას შორის კავშირის წრფივ დამოკიდებულებასთან „სიახლოვეს“. კორელაციის კოეფიციენტი აფასებდა კავშირის „სიძლიერეს“ (სიმჭიდროვეს). წარმოდგენილი იყო კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლის წესი. ამ წესის მიხედვით გამოთვლილი რიცხვი ახასიათებდა იმ ორ სიდიდეს შორის წრფივი დამოკიდებულების არსებობას.

სასურველია, მასწავლებელმა გაახსენოს მოსწავლეებს კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულა და რამდენიმე ადრე განხილული მაგალითი. უნდა გავიხსენოთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტის გამოყენებით შეუძლებელია პროგნოზირება. ამ საკითხში მისადაგების წრფე გვეხმარება — აიგება წრფე, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ვივარაუდოთ ერთ-ერთი სიდიდის მნიშვნელობა მეორე სიდიდის გამოყენებით. მოსწავლეებს გავაცნობთ მისადაგების წრფის განტოლებას. ფორმულიდან კარგად ჩანს, რომ მისადაგების წრფე გადის ($\bar{x}$; $\bar{y}$) წერტილზე ($\bar{x}$ არის ერთი სიდიდის მნიშვნელობათა საშუალო, $\bar{y}$ — მეორე სიდიდის მნიშვნელობათა საშუალო). მოცემულია დახრის ფორმულა. უნდა განვასხვაოთ დახრა კორელაციის კოეფიციენტისგან; თუმცა, შეიძლება მათ შორის კავშირის ფორმულის მიღებაც.

მოსწავლეებმა კარგად უნდა გაიაზრონ, რომ მისადაგების წრფე გვეხმარება ერთი სიდიდის მნიშვნელობის მეორე სიდიდის მიხედვით პროგნოზირებაში.

ამ შემთხვევაშიც შეიძლება მივიჩნიოთ ერთი სიდიდე დამოკიდებულ ცვლადად, მეორე — დამოკუდებულ ცვლადად.

რაც მეტ საკვებს იღებს გოჭი ყოველდღიურად, მისი მასაც უფრო იზრდება.

კორელაცია კი გვიჩვენებს, რა სახით იცვლება ორივე ცვლადი. აქ ცვლადები თანაბარ პირობებშია „ჩაყენებული“.

გოჭის მასა დადებით კორელაციაშია საკვების რაოდენობასთან.

სასურველია, გამოვყოთ კავშირი დახრასა და კორელაციის კოეფიციენტს შორის:

$$k = r \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}},$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

ანუ

მისადაგების წრფე ყოველთვის გადის ($\bar{x}$; $\bar{y}$) წერტილზე, იგი არის $y = kx + l$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც $l = \bar{y} - k\bar{x}$; ეს განტოლება ასეც ჩაიწერება: $y - \bar{y} = k(x - \bar{x})$.

14) ამოცანაში $\bar{x} = \frac{30+45+33+50+32}{5} = 38$, $\bar{y} = \frac{40+30+36+29+35}{5} = 34$,

$$\bar{x} = \frac{(-8) \cdot 6 + 7 \cdot (-4) + (-5) \cdot 2 + 12 \cdot (-5) + (-6) \cdot 1}{(-8)^2 + 7^2 + (-5)^2 + 144 + 36} = \frac{-152}{318} \approx -0,48.$$

მისადაგების წრფე: $y - 34 = -0,48(x - 38)$.

ამ წრფის გამოყენებით, შეიძლება ვივარაუდოთ ერთი სიდიდის (y -ის) მნიშვნელობა მეორე სიდიდის მიხედვით. თუ $x=40$, მაშინ $y \approx 33,04$.

მისადაგების წრფის დახრა უარყოფითია — მზიას შეფასებების ზრდისას მოსალოდნელია ბექას შეფასებების კლება.

ანალოგიურად ამოიხსნება (15) ამოცანა. ამ ამოცანების დაწვრილებით განხილვა დაეხმარება მოსწავლეებს კომპლექსური დავალების ერთ-ერთი ნაწილის შესრულებაში.

საშინაო დავალების „ტესტები“ კლასში განხილული „ტესტების“ ანალოგიურია; მოითხოვს წრფივი ფუნქციის გრაფიკის ცოდნას, გრაფიკის საშუალებით წრფივი ფუნქციის თვისებების განხილვას.

10 ფორმულა, რომლითაც კუთხეების ჯამის n -ზე დამოკიდებულება მოიცემა, n -ის მიმართ წრფივი ფუნქციის ის შემთხვევაა, როცა n ნატურალური რიცხვია და $n > 2$.

11 $y = 1200 - 5x$ ფორმულით წრფივი ფუნქცია მოიცემა; $y(10) = 1150$.

12 თუ x დღეების რიცხვია, მაშინ გვექნება შემდეგი შემთხვევები:

$$y = 100 + 15x;$$

$$y = 100 + 20x;$$

ცხადია, თანხა უფრო სწრაფად იზრდება იმ შემთხვევაში, როცა დახრა მეტია.

14 ეს ამოცანა კლასში ამოხსნილი (14) და (15) ამოცანების ანალოგიურია; უნდა ვიპოვოთ $\bar{x}$ და $\bar{y}$, k და შევადგინოთ $(\bar{x}; \bar{y})$ წერტილზე გამავალი მისადაგების წრფის განტოლება. ამ წრფის საშუალებით, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ y ექსპერტის შეფასება იმ შემთხვევაში, როცა x ექსპერტის შეფასება არის 12 ქულა, იქნება 12,26 ქულა. აქ დახრა დადებითია. x ექსპერტის, შეფასებების ზრდისას მოსალოდნელია y ექსპერტის შეფასებათა ზრდა.

§10.2. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი გრაფიკი. წრფითა პარალელურობისა და მართობულობის პირობები

წინარე ცოდნა: პარალელოგრამის განსაზღვრება, წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი, პითაგორას თეორემა და მისი შებრუნებული თეორემა: ეს საკითხები ცნობარშიც არის წარმოდგენილი. მათ შესახებ ცოდნის გააქტიურება დაეხმარება მოსწავლეებს, განავითარონ მსჯელობის ხაზი და კარგად გაიაზრონ დამტკიცების პროცესი; შევეცადოთ, თეორემის დამტკიცების პროცესში ყველა მოსწავლე ჩაერთოს. დაბალი მზაობის მოსწავლეებმაც უნდა შეძლონ პარალელოგრამის თვისებებთან და პითაგორას თეორემასთან დაკავშირებული ნაწილების გაგება. საკითხი ნაცნობია მოსწავლეებისთვის, ამჯერად მიმდინარეობს ცნობილი წინადადებების დამტკიცება, სხვა ცნობილი დებულებებიდან იმის დასაბუთება, რომ **წრფივი** ორუცნობიანი განტოლებით, რომელშიც x -ისა და y -ის კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნული არ არის, მოიცემა წრფე — საკოორდინატო სიბრტყეზე ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლის კოორდინატები, აკმაყოფილებს $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) განტოლებას, წრფეა.

მოსწავლეები ადვილად გაიაზრებენ წრფეთა პარალელურობის პირობასაც; თუ სიბრტყეზე ორი წრფეა მოცემული — $y=k_1x+l_1$ და $y=k_2x+l_2$, ამასთანავე, $l_1 \neq l_2$, მაშინ ამ წრფეების პარალელურობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს პირობა: $k_2=k_1$.

თუ ამ პირობას p ასოთი აღვნიშნავთ, პირობას: „წრფეები პარალელურია“ კი — q ასოთი, მაშინ გვაქვს შემდეგი ორი დებულება (პირდაპირი და მისი შებრუნებული):

$p \rightarrow q$ (1), თუ ჭეშმარიტია p , მაშინ ჭეშმარიტია q .

ეს ნიშნავს, რომ p არის q -სთვის საკმარისი პირობა.

$q \rightarrow p$ (2), თუ ჭეშმარიტია q , მაშინ ჭეშმარიტია p , აქ p არის q -სთვის აუცილებელი პირობა.

მე-20 საუკუნის 70-იან წლებში ცნებები „აუცილებელი პირობა“, „საკმარისი პირობა“ მე-7 კლასის სახელმძღვანელოებში განიხილებოდა. მოსწავლეებს ამ ასაკში უჭირდათ ამ ცნებების გააზრება. საშუალო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების მიზნების გათვალისწინებით, აღნიშნული საკითხების მე-10 კლასის II სემესტრის სახელმძღვანელოში შეტანას შესაძლებლად ვთვლით.

პითაგორას თეორემისა და მისი შებრუნებული თეორემის გამეორება დაეხმარება მოსწავლეებს, რომ კარგად გაიაზრონ წრფეთა მართობულობის პირობა. აქ საჭიროა შემდეგი დებულების გამეორებაც — თუ კუთხის გვერდები პარალელურ წრფეებზეა, მაშინ ეს კუთხეები ტოლია ან მათი ჯამი 180° -ია.

თუ $k_1k_2=-1$, მაშინ $y=k_1x$ და $y=k_2x$ წრფეებს შორის კუთხე მართია; მაშინ მათ პარალელურ — $y=k_1x+l_1$ და $y=k_2x+l_2$ წრფეებს შორის კუთხეც მართია. ცალკეა განსახილველი Ox -ის პარალელური და Oy -ის პარალელური წრფეების მართობულობა. მათთვის აღნიშნულ ფორმულას ვერ გამოვიყენებთ.

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემა, „ტესტებში“ სწორი პასუხების შერჩევა ეხმარება მოსწავლეებს განიმტკიცონ ცოდნა წრფივი ორუცნობიანი განტოლების გეომეტრიული აზრის, წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის პირობების შესახებ.

⑥ „ტესტით“ კიდევ ერთხელ ვიმეორებთ „საკმარის“ და „აუცილებელ“ პირობებს; „თუ p , მაშინ q “. ამ თეორემაში p არის საკმარისი პირობა q -სთვის; q არის აუცილებელი პირობა p -სთვის.

⑧ თუ წრფე გადის $B(0; 5)$ წერტილზე, მაშინ მისი განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$y=kx+5,$$

$3x-6y+2=0$ განტოლებიდან გვაქვს:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}.$$

პარალელურობის პირობიდან გვაქვს: $k=\frac{1}{2}$.

ანალოგიურად ამოიხსნება ⑨ ამოცანა. აქ ვსარგებლობთ მართობულობის პირობით: $k_1k_2=-1$. $4x-8y+3=0$ წრფის დახრა არის: $k_1=\frac{1}{2}$, მაშასადამე, $k_2=-2$; საძიებელი წრფე არის: $y=-2x+3$.

⑩ შუა წერტილი:
$$\begin{cases} x=\frac{3-3}{2}=0 \\ y=\frac{-4+2}{2}=-1 \end{cases}.$$

AB წრფის განტოლება $(3; -4)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებაა.

ამ განტოლებას ასეც ჩავწერთ

$$y+4=k_1(x-3)$$

ეს წრფე გადის B წერტილზეც:

$$2+4=k_1(-3-3)$$

$$k_1=-1, k_2=1.$$

$(0; -1)$ წერტილზე გამავალი, $k_2=1$ დახრის მქონე წრფის განტოლებაა

$$y+1=x$$

$$x-y-1=0.$$

11 და 12 ამოცანებში ვპოულობთ წრფეების დახრებს და ვიყენებთ პარალელურობისა და მართობულობის პირობებს.

13 $q: ax^2+bx+c=0$ განტოლებას აქვს ორი ფესვი.

$p: D>0$ (დისკრიმინანტი დადებითია).

თუ $D>0$, მოცემული კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი — p საკმარისი პირობაა q -სთვის:

თუ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი, მაშინ $D>0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში, განტოლებას ერთი ფესვი აქვს, ან არ აქვს ფესვი) — p აუცილებელი პირობაა q -სთვის.

14 ეს პირობა აუცილებელი პირობაც არის — თუ რიცხვი იყოფა 3-ზე, მაშინ მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

15 ნატურალური რიცხვი რომ მარტივი იყოს, საკმარისია მას ჰქონდეს ზუსტად ორი სხვადასხვა გამყოფი (აქ გამყოფებში იგულისხმება ნატურალური რიცხვები).

თუ ნატურალური რიცხვი მარტივია, მაშინ მას აუცილებლად ზუსტად ორი გამყოფი აქვს.

ნატურალური რიცხვი რომ მარტივი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას ჰქონდეს ზუსტად ორი სხვადასხვა გამყოფი.

p — ნატურალურ რიცხვს ზუსტად ორი გამყოფი აქვს:

q — ნატურალური რიცხვი მარტივია.

$p \rightarrow q$ (p საკმარისია q -სთვის).

$q \rightarrow p$ (p აუცილებელია q -სთვის).

ყურადღება გავამახვილოთ საშინაო დავალების იმ ამოცანებზე, რომლებიც 13-15 ამოცანების ანალოგიურია.

14 თუ ნატურალური რიცხვის ციფრების ჯამი იყოფა 9-ზე, მაშინ ეს ნატურალური რიცხვი იყოფა 9-ზე.

p — ციფრების ჯამი იყოფა 9-ზე; q — რიცხვი იყოფა 9-ზე.

წარმოდგენილია თეორემა (პირობითი წინადადების სახით): $p \rightarrow q$.

ჭეშმარიტია შებრუნებული დებულება: $q \rightarrow p$.

მაშასადამე, p არის q -სთვის საკმარისი პირობაც (პირდაპირი თეორემა) და აუცილებელი პირობაც (შებრუნებული თეორემა).

ორივე თეორემის ჭეშმარიტება n -ნიშნა ნატურალური რიცხვის შემდეგი წარმოდგენიდან კარგად ჩანს:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_0 = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) + \underbrace{99 \dots 9}_{n\text{-ჯერ}} a_n + \underbrace{99 \dots 9}_{(n-1)\text{-ჯერ}} a_{n-1} + \dots + 9a_1.$$

15 პირობა ასე ჩაინერგება:

$$a=bq \quad (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

(1) ტოლობით მოცემული დებულებაა ჩანერილი p : a იყოფა b -ზე. მაშინ ის უდიდესი ნატურალური რიცხვი, რომელზეც იყოფა a და b , არის b (q პირობა). მაშასადამე, გვაქვს: $p \rightarrow q$ („ a იყოფა b -ზე“ საკმარისია იმისთვის, რომ a -სა და b -ს უდიდესი საერთო გამყოფი იყოს b).

შებრუნებულიც სწორია: $q \rightarrow p$; თუ a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფია b , მაშინ აუცილებლად a იყოფა b -ზე;

იმისათვის, რომ a -სა და b -ს უდიდესი საერთო გამყოფი იყოს b , აუცილებელია და საკმარისია, რომ a იყოფოდეს b -ზე.

§10.3. წრფივი ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე

სახელმძღვანელოში მოცემული მაგალითები შეიძლება გამოვიყენოთ წინარე ცოდნის გასააქტიურებლად — წრფივი ფუნქციით აღინერება, მაგალითად, თანაბარი მოძრაობა.

მოსწავლეები იცნობენ თანაბარი მოძრაობისას მანძილის დამოკიდებულებას დროზე, v სიჩქარე მუდმივია და ის დახრის როლს ასრულებს, $S=S_0+vt$. მოსწავლეები თანაბარაჩქარებულ მოძრაობასაც იცნობენ მე-9 კლასის ფიზიკის კურსიდან. ამ შემთხვევაში a აჩქარებაა მუდმივი, v სიჩქარე კი t დროის წრფივი ფუნქციაა: $v=v_0+at$, აქ a არის დახრა, იგი თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას მუდმივია.

ამ ორი მაგალითის განხილვითაც შეიძლება წრფივი ფუნქციის მახასიათებელ თვისებებზე მსჯელობა: თუ $S=S_0+vt$, $\Delta S=v \cdot \Delta t$, $v=\frac{\Delta S}{\Delta t}$, აქ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე, რომელიც ამ შემთხვევაში მოძრაობის სიჩქარეა, გამოისახება $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ სიდიდით.

ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე, რომ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის მუდმივობა წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისებაა. მოსწავლემ კარგად უნდა გაიაზროს, რომ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდის მიმართ პროპორციულობის თვისება აქვს წრფივ ფუნქციას. ამასთანავე, თუ რომელიმე ფუნქციას ეს თვისება აქვს, ის წრფივი ფუნქციაა. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ ორივე დებულების დასაბუთება.

ამოცანების ამოხსნის საშუალებით განვიმტკიცებთ ცოდნას წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისების შესახებ; თუ $y=f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი არგუმენტის ნაზრდის პროპორციულია: $\Delta y=k \cdot \Delta x$, მაშინ მოიძებნება ისეთი l რიცხვი, რომ $y=kx+l$ („ტესტი“ ①); თუ $\Delta y=7 \cdot \Delta x$, მაშინ მოიძებნება ისეთი l რიცხვი, რომ $y=7x+l$, l -ის პოვნა შეიძლება პირობიდან: $y(-1)=2$ („ტესტი“ ②).

თუ $f(x)=2x+3$, მაშინ $\Delta f(x)=2 \cdot \Delta x$ („ტესტი“ ③).

$f(x)=7x+8$ წრფივი ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე არის 8 („ტესტი“ ④)

თუ $f(x)=3x+2$, მაშინ $f(5)-f(2)=(5-2) \cdot k=3 \cdot 3=9$. („ტესტი“ ⑤)

ანალოგიურია საშინაო დავალების ტესტებიც.

წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისების გამოყენებით, ვხსნით ამოცანებს:

$$\textcircled{6} \quad \begin{aligned} k &= 3, \quad y = 3x + l, \\ 2 &= -24 + l, \quad l = 26, \\ y &= 3x + 26. \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad \begin{aligned} \Delta y &= k \cdot \Delta x \\ (3-4) &= k(4-3), \\ k &= -1, \\ y &= -x + l \\ 4 &= -3 + l \\ l &= 7 \\ y &= -x + 7. \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad \begin{aligned} \Delta y &= k \cdot \Delta x, \\ \Delta y &= 5 \cdot \Delta x, \\ 0,01:5 &= 0,002. \end{aligned}$$

ცდომილებად შეიძლება მივიღოთ Δx , მოცე-
მულია: $|\Delta y| \leq 0,01$. მაშასადამე, $|\Delta x| \leq \frac{0,01}{5}$.

$\textcircled{10}$ ვთქვათ, (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, a_1 პირველი წევრია, d — სხვაობა; მაშინ გვაქვს

$$a_n = a_1 + dn - d = (a_1 - d) + dn.$$

მაშასადამე, თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ a_n არის n -ის წრფივი ფუნქცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.

ჭეშმარიტია შეზღუდული დებულება: თუ a_n არის n ნატურალური რიცხვის წრფივი ფუნქცია, მაშინ a_n არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრია; მართლაც, ვთქვათ,

$$\begin{aligned} a_n &= kn + l, \text{ მაშინ} \\ a_{n+1} - a_n &= k(n+1) + l - kn - l = k, \end{aligned}$$

მაშასადამე, ყოველი წევრი მიიღება წინა რიცხვისადმი k რიცხვის მიმატებით; a_n არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრია. შეიძლება ორივე წინადადება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

იმისათვის, რომ n ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია იყოს წრფივი ფუნქცია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ (a_n) იყოს არითმეტიკული პროგრესია.

(a_n) არითმეტიკული პროგრესია — p ;

n -ზე დამოკიდებული ფუნქცია წრფივია — q .

გვაქვს: $p \rightarrow q$ (p საკმარისია q -სთვის);

$q \rightarrow p$ (p აუცილებელია q -სთვის).

$$\textcircled{11} \quad \begin{aligned} k &= 0,5; \\ y &= 0,5x + l, \\ 2 &= 3 + l, \\ l &= -1 \\ y &= 0,5x - 1. \end{aligned}$$

$$\textcircled{12} \quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{3}{2} \\ k_2 &= -\frac{2}{3} \\ y &= -\frac{2}{3}x + l, \quad l = 3; \\ y &= -\frac{2}{3}x + 3. \end{aligned}$$

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, კლასში ამოხსნილი ამოცანების ანალოგიურია. გავარჩიოთ რამდენიმე ამოცანა.

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \quad \Delta y &= 5 - 6 = -1; \\ \Delta x &= 6 - 5 = 1; \\ k &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1. \\ y &= -x + l, \quad 6 = -5 + l, \quad l = 11, \\ y &= -x + 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle 9 \quad & \text{პირობის თანახმად, } \Delta y \leq 0,01; \\ & \frac{\Delta y}{\Delta x} = 100; \\ & \Delta x = \frac{\Delta y}{100}; \quad \Delta x \leq \frac{0,01}{100}; \\ & \Delta x \leq 0,0001. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle 10 \quad & \text{ა) } v = 9 \text{ სმ/წმ;} \\ & S = S_0 + vt; \\ & S = 5 + 9t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle 11 \quad & k = 1,5, \quad y = 1,5x + l \\ & 2 = 4,5 + l \\ & l = -2,5 \\ & y = 1,5x - 2,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle 12 \quad & k_1 = \frac{5}{2}; \\ & k_2 = -\frac{2}{5}; \\ & y = -\frac{2}{5}x + l \\ & 2 = -\frac{18}{5} + l \\ & l = 5,6 \\ & y = -0,4x + 5,6. \end{aligned}$$

§10.4. ფუნქციითა გრაფიკების გარდაქმნის მაგალითები

გრაფიკების გარდაქმნების შემთხვევების განხილვას წინ უძღვის წინარე ცოდნის გააქტიურება, რომელიც დაკავშირებულია სამიზნე ცნებებთან — ფუნქცია, გრაფიკი; საკითხებთან — პარალელური გადატანა; ღერძული და ცენტრული სიმეტრიები.

პარალელური გადატანის შესახებ ცოდნის გახსენება ცნობარის გამოყენებითაც შეიძლება; მაგალითად, $\bar{p}(0; b)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას, ყოველი M წერტილი „მოძრაობს“ ზევით b ერთეულით, თუ $b > 0$ და — ქვევით, $|b|$ ერთეულით, თუ $b < 0$. $\bar{p}(a; 0)$ პარალელური გადატანისას მოძრაობს მარცხნივ ან მარჯვნივ.

პარალელური გადატანის შესახებ ამ საკითხების გამეორების შემდეგ, მოსწავლეები კარგად აითვისებენ გრაფიკის გარდაქმნის ფორმულებს, როცა $y = f(x) + b$ ფუნქციის ან $y = f(x + a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისგან. შემდეგ განვიხილავთ შეკუმშვისა და გაჭიმვის შემთხვევებს, შესაბამისად, Ox ღერძისადმი და Oy ღერძისადმი. სურათების გამოყენებით, მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ გარდაქმნის ცნების გააზრება.

ორდინატთა ღერძისადმი სიმეტრიას უკავშირდება $y = f(-x)$ — ფუნქციის გრაფიკის მიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან.

ცოდნის განმტკიცება მიმდინარეობს ამოცანების ამოხსნით. მაგალითად, 1 ამოცანაში განხილულია გარდაქმნის სხვადასხვა მაგალითი: $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკისგან პარალელური გადატანით $\bar{p}(1; 0)$ ვექტორით („მარჯვნივ“ 1 ერთეულით) მიიღება $y = (x - 1)^2$ ფუნქციის გრაფიკი, $y = 0,5x^2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის „შეკუმშვით“ 2-ჯერ; $y = -x^2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიით აბსცისათა ღერძის მიმართ.

② დ) მაგალითში გვაქვს ორი გარდაქმნის მიმდევრობით ჩატარების შემთხვევა. $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\bar{p}(1; 0)$ ვექტორით (მარჯვნივ 1 ერთეულით), მიიღება $y = \frac{1}{x - 1}$ ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკის პარალელური გადატანით

$\vec{p}(0; 1)$ ვექტორით, მიიღება $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკი. თუმცა, შეიძლება გრაფიკის გარდაქმნა ერთი ვექტორით: $\vec{p}(1; 1)$.

$$\textcircled{3} \text{ გ) } y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3x+6-6-1}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+1}.$$

გარდაქმნის პროცესი შეიძლება ასე აღვწეროთ:

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x+1} \rightarrow y = 7 \cdot \frac{1}{x+1} \rightarrow y = -7 \cdot \frac{1}{x+1} \rightarrow 3 - \frac{7}{x+1};$$

შესაბამისად, გვაქვს: პარალელური გადატანა $\vec{p}(-1; 0)$ ვექტორით $\rightarrow$ გაჭიმვა 7-ჯერ Ox ღერძიდან $\rightarrow$ სიმეტრია აბსცისათა ღერძის მიმართ $\rightarrow$ პარალელური გადატანა $\vec{p}(0; 3)$ ვექტორით („ზევით“ 3 ერთეულით).

$$\textcircled{6} \text{ ე) } y = \sqrt{x+2} - 3;$$

შეიძლება მოსწავლემ სწრაფად შენიშნოს, რომ მითითებული ფუნქციის გრაფიკი $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკისგან მიიღება პარალელური გადატანით ვექტორით: $\vec{p}(-2; -3)$. მაშასადამე, ამ პარალელური გადატანისას კოორდინატთა სათავე აისახება წერტილზე: $O'(-2; -3)$.

კლასში, რამდენიმე გაკვეთილზე ყველა ამოცანის ამოხსნის გარჩევის შემდეგ, მოსწავლეებს არ უნდა გაუჭირდეთ საშინაო დავალების შესრულება.

§10.5. კვადრატული ფუნქცია. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

ფუნქცია, ფუნქციის გრაფიკი, ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნის ფორმულები — ამ საკითხების შესახებ ცოდნის გამეორება წინ უძღვის კვადრატული ფუნქციის შესახებ ცოდნის გაღრმავებას.

პრაქტიკული ამოცანების განხილვის შემდეგ, ვიმეორებთ კვადრატული სამწევრისგან სრული კვადრატის გამოყოფისა და კვადრატული ფუნქციის ნულების ფორმულებს. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებას წინა პარაგრაფში შესწავლილი ხერხებით ვანარმოებთ — $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნის საშუალებით ვაგებთ — გარდაქმნის პროცესი შეიძლება ასე ვანარმოოთ:

$y = x^2 \rightarrow y = ax^2$ (გრაფიკის გაჭიმვა, ან შეკუმშვა Ox ღერძის მიმართ, თუ $a > 0$; თუ $a < 0$, ვიყენებთ სიმეტრიას Ox ღერძის მიმართ).

$$y = ax^2 \rightarrow y = a(x - x_0)^2 + y_0 \text{ (პარალელური გადატანა } \vec{r}(x_0; y_0) \text{ ვექტორით, } x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = -\frac{D}{4a}.$$

საკონტროლო კითხვებზე პასუხების გაცემისას მოსწავლეები კვადრატული ფუნქციის ყველა თვისებას კიდევ ერთხელ ჩამოაყალიბებენ.

ცოდნის განმტკიცება ამოცანების ამოხსნას უკავშირდება. „ტესტებზე“ პასუხების შერჩევა მოითხოვს კვადრატული ფუნქციის თვისებების (ნიშანმუდმივობის შუალედები, ნულები, მნიშვნელობათა სიმრავლე) ცოდნას.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

⑪ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია, როცა $a>0$, დადებითია ფესვებს გარეთ შუალედებში, უარყოფითია ფესვებს შორის შუალედში; ხოლო როცა $a<0$, დადებითობის შუალედი არის ფესვებს შორის შუალედი, ხოლო უარყოფითობის შუალედებია ფესვებს გარეთ შუალედები. მაშასადამე, საჭიროა მოცემული ფუნქციის ნულების (ფესვების) პოვნა.

⑫ ერთ-ერთი კათეტი — x ;

მეორე კათეტი — $8-x$;

სამკუთხედის ფართობი — $S(x)=\frac{1}{2}x(8-x)$, $S(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$;

ფართობი უდიდესია, როცა $x=\frac{-4}{-1}=4$.

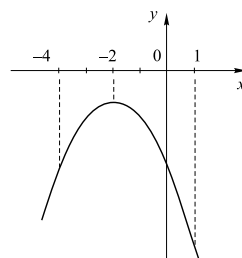
⑬ სასურველია, მოსწავლეებმა საკოორდინატო სიბრტყეზე $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახონ. ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები უნდა ვეძებოთ პარაბოლის წვეროში (თუ წვერო ეკუთვნის მითითებულ შუალედს), ან შუალედის ბოლოებში;

$$x_0=-\frac{2}{1}=-2.$$

რადგან -2 უფრო ახლოს არის -4 -თან, ვიდრე 1 -თან, საკმარისია ვიპოვოთ $f(-2)$ და $f(1)$. $f(-2)=-3$,

$$f(1)=-\frac{1}{2}-2-5=-7,5$$

$$E(f)=[-7,5; -3].$$



⑭ $a<0$ და $8=-\frac{D}{4a}$; $8=-\frac{16-24a}{4a}$
 $-32a=16-24a$, $a=-2$.

⑯ ა) თუ $a>0$, მაშინ $af(\beta)>0$ პირობიდან $f(\beta)>0$ და ფუნქცია დადებითია ფესვების გარეთ შუალედებში,

თუ $a<0$, მაშინ $f(\beta)<0$ და როცა $a<0$, მაშინაც ფუნქცია უარყოფითია ფესვების გარეთ შუალედებში. ე. ი. $\beta<x_1$ ან $\beta<x_2$.

ბ) შებრუნებული დებულება: თუ β ეკუთვნის ფესვებს გარეთ ერთ-ერთ შუალედს, მაშინ, როცა $a>0$ გვაქვს $f(\beta)>0$ და $af(\beta)>0$; როცა $a<0$, გვაქვს $f(\beta)<0$ და მაშინაც $af(\beta)>0$.

გ) იმისათვის, რომ β რიცხვი ეკუთვნოდეს ფესვებს გარეთ რომელიმე შუალედს, აუცილებელია და საკმარისი, შესრულდეს პირობა: $af(\beta)>0$.

⑰ იხსნება ⑭ ამოცანის ანალოგიურად.

⑱ პირობის თანახმად, წვეროს x კოორდინატი ტოლია რიცხვის: $\frac{2+9}{2}=5,5$; მაშასადამე, $-\frac{q}{2p}=5,5$; ცხადია, $p>0$.

მაშასადამე, $g(x)=px^2+qx+2023$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედი არის $[5,5; +\infty)$.

საშინაო დავალების ამოცანები, ძირითადად, საკლასო დავალების ამოცანების ანალოგიურია.

მითითებები ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.

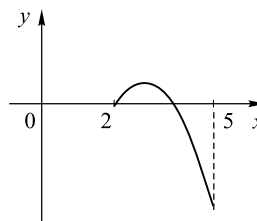
12 მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი — x ;
 მეორე გვერდი — $8-x$;
 ფართობი — $S(x)=x(8-x)$, $S(x)=-x^2+8x$;
 ფართობი უდიდესია, როცა $x=4$.

13 $f(x)=2x^2-4x+5$;
 $x_0=\frac{4}{4}=1$
 $f(1)=3$
 $f(4)=32-16+5=21$
 $E(f)=[3;21]$.

14 $y_0=-\frac{D}{4a}$ და $a>0$;
 $3=-\frac{36-32a}{4a}$; $-12a=36-32a$
 $20a=36$
 $a=1,8$.

15 თუ $af(\beta)<0$, მაშინ გვაქვს: თუ $a>0$, მაშინ $f(\beta)<0$, ეს ნიშნავს, რომ β ეკუთვნის ფესვებს შორის შუალედს;
 თუ $a<0$, მაშინ $f(\beta)>0$; ეს ნიშნავს, რომ β ეკუთვნის ფესვებს შორის შუალედს.
 ჭეშმარიტია შებრუნებული დებულებაც.
 მაშასადამე, გვაქვს: „იმისათვის, რომ β რიცხვი ეკუთვნოდეს ფესვებს შორის შუალედს, აუცილებელია და საკმარისია, რომ შესრულდეს პირობა: $af(\beta)<0$ “.

16 $x_0=2,5$. რადგან $2,5$ უფრო ახლოსაა 2-თან, საკმარისია ვიპოვოთ:
 $f(2,5)=-6,25+12,5-6=0,25$;
 და
 $f(5)=-25+25-6=-6$.
 $E(f)=[-6; 0,25]$.



17 $-\frac{b}{2a}=3$; $-\frac{b}{4}=3$,
 $b=-12$.

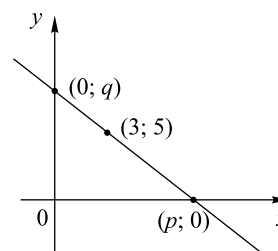
18 ორივე ფუნქციის სიმეტრიის ღერძია $x=-\frac{q}{2p}$. პირობის თანახმად,
 $p<0$; $x_1=3$, $x_2=7$; $x_0=5$;
 $-\frac{q}{2p}=5$
 პასუხი: $x=5$.

მოისაზრე

1 წრფივი $y=kx+l$ ფუნქციის მახასიათებელი თვისების თანახმად, $\Delta y=k \cdot \Delta x$. მაშასადამე, გვაქვს:

$$\begin{cases} -5=k \cdot (p-3) \\ 5-q=3k \end{cases}$$

$$\frac{q-5}{5}=\frac{3}{p-3}, \quad q=5+\frac{15}{p-3}.$$



პირობით, p და q არაუარყოფით მთელი რიცხვებია. ამიტომ გვაქვს 5 შესაძლებლობა:

p	0	4	6	8	18
q	0	20	10	8	6

($p=0, q=0$ შემთხვევაში წრფე სათავეზე გადის).

დახრას ვიპოვით ტოლობიდან $k=\frac{5-q}{3}$, ხოლო შესაბამის l კოეფიციენტებს — $5=3k+l$ პირობიდან.

ამოცანის პირობა სრულდება 5 წრფისთვის:

$$y=\frac{5}{3}x; \quad y=-5x+20; \quad y=-\frac{5}{3}x+10; \quad y=-x+8; \quad y=-\frac{1}{3}x+6.$$

2

$$\Delta y = k \cdot \Delta x$$

$$\begin{cases} -7 = k(a-3) \\ 7-b = k(3-0) \end{cases}$$

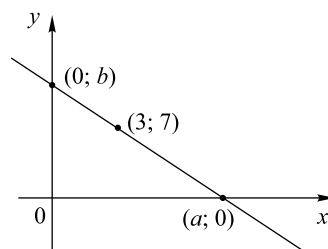
$$\frac{b-7}{7} = \frac{3}{a-3}$$

$$21 = ab - 3b - 7a + 21$$

$$ab - 3b = 7a$$

$$b = \frac{7a}{a-3}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{7a^2}{a-3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{a^2-9+9}{a-3} = \frac{7}{2} \left(a+3 + \frac{9}{a-3} \right) = \frac{7}{2} \left(a-3 + \frac{9}{a-3} + 6 \right).$$



I ხერხი: გეომეტრიული საშუალოების შედარებიდან მივიღებთ $(m+n) \geq \sqrt{mn}$. ამრიგად,

$$a-3 + \frac{9}{a-3} \geq 2\sqrt{9} = 6.$$

ტოლობა გვაქვს, როცა $(a-3)^2 = 9$, $a-3 = 3$.

$$a = 6.$$

II ხერხი: $a-3 + \frac{9}{a-3} = (\sqrt{a-3})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{a-3}}\right)^2 - 6 + 6 = \left(\sqrt{a-3} - \frac{3}{\sqrt{a-3}}\right)^2 + 6 \geq 6.$

3

სურათიდან ჩანს, რომ $f(1) > 0$;

$$k+b > 0,$$

$b > -k$, რადგან b და $-k$ დადებითი რიცხვებია, $|b| > |k|$.

4

ვთქვათ, პარაბოლები მოცემულია კვადრატული ფუნქციებით:

$$y = p(x-a)^2 + b;$$

$$y = q(x-c)^2 + d.$$

პირობის თანახმად, გვაქვს:

$$\begin{cases} d = p(c-a)^2 + b \\ b = q(a-c)^2 + d \end{cases}$$

აქედან გვაქვს:

$$b+d = p(c-a)^2 + q(a-c)^2 + (b+d),$$

$$p(c-a)^2 + q(c-a)^2 = 0$$

მაშასადამე,

$$p+q=0$$

თუ $a=c$, მაშინ $b=d$ — რაც შეუძლებელია.

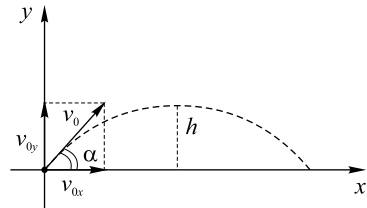
კომპლექსური დავალება. დავალების პირველ და მეორე ნაწილებთან დაკავშირებული საკითხები უკვე განვიხილეთ; შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის შემდეგ, მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ გაბნევის დიაგრამის აგება და შესაბამისი მისადაგების წრფის განტოლების შედგენა.

მესამე ნაწილი დედამიწის ზედაპირისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელის შექმნას ეძღვნება. ეს საკითხი ფიზიკის სახელმძღვანელოებშიც არის წარმოდგენილი, თუმცა, ხშირად, ფიზიკის სახელმძღვანელოებში ფორმულები შესაბამისი ახსნის გარეშეა წარმოდგენილი. მე-10 კლასელმა შეიძლება მიიღოს სათანადო ფორმულები.

მოსწავლე შეძლებს სიჩქარის ვექტორის დაშლას ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ მიმართულებების მიხედვით:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}.$$

ვექტორების სიგრძეებისთვის გვაქვს: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$,
 $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.



გადაადგილების დროზე დამოკიდებულება გამოისახება ფორმულით:

$$\vec{S}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} \quad (1)$$

$\vec{g}$ თავისუფალი აჩქარების ვექტორია, იგი მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ.

(1) ფორმულიდან მიიღება მოძრავი სხეულის x და y კოორდინატების t დროზე დამოკიდებულების ფორმულები:

$\vec{g}$ -ს გეგმილი Ox ღერძზე 0-ია, Oy ღერძზე — g .

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

ამ ორი ტოლობიდან შეიძლება t ცვლადის გამორიცხვა და y -ის x -ით გამოსახვა:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

დამოკიდებულება გამოისახება კვადრატული ფუნქციით, რომლის გრაფიკი სათავეზე გადის.

ამ ფორმულის მიხედვით, კვადრატული ფუნქციის თვისებების გამოყენებით, ვპოულობთ სხეულის მაქსიმალურ სიმაღლეს, ფრენის ხანგრძლივობასა და ფრენის სიშორეს.

ამოცანები თვითშეფასებისთვის

მითითებები.

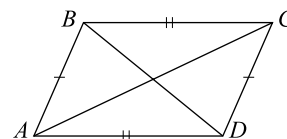
① პირობის თანახმად, ფუნქცია წრფივი ფუნქციაა.

③ $k=5; y=5x+l;$
 $7=15+l, \quad l=-8.$
 $y=5x-8.$

⑦ სამკუთხედების ტოლობის III ნიშნის თანახმად, $\triangle ACD=\triangle ABD$, მაშასადამე, $\angle BAD=\angle CDA=90^\circ$.

პარალელოგრამი მართკუთხედი.

ჭეშმარიტია შებრუნებული დებულებაც, მაშასადამე, გვაქვს:



იმისათვის, რომ პარალელოგრამი მართკუთხედი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, მისი დიაგონალები ტოლი იყოს.

⑧ $6x+3y-8=0, \quad 3y=-6x+8$
 $y=-2x+\frac{8}{3}$
 $10-\frac{8}{3}=\frac{22}{3}.$

შეიძლება გამოვიყენოთ პარალელური გადატანა $\vec{p}(0; -\frac{22}{3})$ ვექტორით.

პირველი წრფე Oy ღერძს კვეთს $(0; 10)$ წერტილში, მეორე — $(0; \frac{8}{3})$ წერტილში.

⑨ გვაქვს პარალელური გადატანა $\vec{p}(4; -9)$ ვექტორით:

$$\begin{cases} x'=x+4 \\ y'=y-9, \text{ საიდანაც} \end{cases} \quad \begin{cases} x=x'-4 \\ y=y'+9. \end{cases}$$

მიიღება პარაბოლა $y+9=2(x-4)^2+4(x-4)-3,$
 $y=2(x-4)^2+4(x-4)-3-9$
 $y=2x^2-12x+4.$

⑩ $-\frac{D}{4a}=-4; \quad \frac{b^2-84}{4}=4.$
 $b^2=100; \quad b=10 \text{ ან } b=-10.$

X თავის დამატებითი ამოცანები

მითითებები.

① x წთ-ში გავლილი მანძილი: $S(x)=80x$ (მ), $0 \leq x \leq 100.$
 $S(3)=240$ მ, $S(5,25)=420$ მ.
 $200=80x,$
 $x=2$ წთ 30 წმ.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \Delta y &= k \cdot \Delta x, \quad k = -\frac{8}{3}; \\ y &= -\frac{8}{3}x + l, \quad l = +3 \\ y &= -\frac{8}{3}x + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad |x| &= 1,5; \\ x &= 1,5; \quad y = 4,5 + 12,5 = 17; \quad (1,5; 17) \\ x &= -1,5; \quad y = -4,5 + 12,5 = 8; \quad (-1,5; 8). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad y &= kx + l, \quad l = 3 \\ \begin{cases} y &= kx + 3 \\ y &= 3x - 6; \quad |x| = 5, \quad x = 5 \quad \text{ან} \quad x = -5. \end{cases} \\ \text{თუ } x &= 5, \quad y = 9; \quad (5; 9), \quad k = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{6}{5}x + 3; \\ \text{თუ } x &= -5, \quad y = -21; \quad (-5; -21), \quad k = \frac{24}{5}, \quad y = \frac{24}{5}x + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad \text{ა) } k_1 &= -\frac{1}{4}; & \text{ბ) } k_2 &= 4. \\ y &= -\frac{1}{4}x + l; & y &= 4x + l \\ -2 &= -\frac{5}{4} + l; & 2 &= -8 + l, \quad l = 10 \\ y &= -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}. & y &= 4x + 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad 2a + 5 &= 0, \quad a = -2,5 \\ x &= -\frac{10}{a+1}; \quad x = \frac{-10}{-1,5} = \frac{20}{3}. \\ &(\frac{20}{3}; 0). \end{aligned}$$

11 ა) ჩამოვყალიბოთ ასე:

თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ დიაგონალები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა.
შებრუნებული: თუ ოთხკუთხედში დიაგონალები ერთმანეთით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია; ოთხკუთხედში დიაგონალები გადაკვეთისას შუაზე რომ იყოფოდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამი იყოს.

p : ოთხკუთხედი პარალელოგრამია

q : დიაგონალები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა.

პირველ წინადადებაში p საკმარისია, მეორეში — p აუცილებელია q -სთვის.

დ) p : ფუნქცია ლუწია,

q : განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

$p \rightarrow q$, აქ q არის p -სთვის აუცილებელი პირობა.

მაგრამ განსაზღვრის არე შეიძლება სიმეტრიული იყოს სათავის მიმართ ($x \in D(f)$, $-x \in D(f)$) მაგრამ არ სრულდებოდეს პირობა: $f(-x) = f(x)$.

მაგალითად, $f(x) = 3x + 7$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის $\mathbf{R}$, $x \in D(f)$, $(-x) \in D(f)$, მაგრამ $f(-x) \neq f(x)$ ნებისმიერი $x \neq 0$ -სთვის.

$$\begin{aligned} \textcircled{12} \quad S &= 12,5t + 20. \\ \frac{\Delta S}{\Delta t} &= 12,5; \quad \Delta S = 12,5 \Delta t, \\ \text{თუ } \Delta t &= 0,02, \quad \text{მაშინ} \\ \Delta S &= 0,25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \quad \Delta u=3, \quad \Delta v=6,6, \quad k=\frac{\Delta v}{\Delta u}=2,2. \\ v=2,2u+l. \quad (2; 4) \text{ წერტილისთვის } 4=4,4+l \\ l=-0,4 \\ v=2,2u-0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14) \quad \vec{p}(0; b) \\ y=1,2x+3+b \\ -2=3,6+3+b \\ b=-8,6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (15) \quad l_1 \text{ წრფე: } y=0,2(x-3,2)-1 \\ y=0,2x-1,64 \\ l_2 \text{ წრფე } y=0,2(x+2)-1 \\ y=0,2x-0,6 \end{aligned}$$

ა) Ox ღერძის გასწვრივ l_1 აისახება l_2 -ზე $\vec{p}(-5,2; 0)$ პარალელური გადატანით,

ბ) Oy ღერძის გასწვრივ l_1 აისახება l_2 -ზე $(0; 1,04)$ პარალელური გადატანით.

$$\begin{aligned} (16) \quad \text{ბ) } x-3=0 \rightarrow x=3, \quad \text{დ) } x=0, x=-6. \\ x-3=6 \rightarrow x=9. \end{aligned}$$

შემაჯავებელი ნერა

თემა: წრფივი და კვადრატული ფუნქციები.

სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: შესაბამისობა; გრაფიკი; ფუნქცია; წრფივი ფუნქცია, კვადრატული ფუნქცია, მათი გრაფიკები და გრაფიკების გარდაქმნა.

შეფასების ინდიკატორები: მოსწავლემ უნდა შეძლოს სიდიდეებს შორის კავშირის დამყარება და წარმოდგენა წრფივი და კვადრატული ფუნქციით; წრფივი ფუნქციის მახასიათებელი თვისება და მისი გამოყენება. პრაქტიკული ამოცანების კვლევა წრფივი და კვადრატული ფუნქციებით.

ამოცანების ნიმუშები

ამოხსენით ამოცანები

(1) დანერეთ $y=-2x+9$ წრფით და საკოორდინატო ღერძებით შექმნილი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისადმი გავლებული სიმაღლის შემცველი წრფის განტოლება. შეასრულეთ ნახაზი, გამოსახეთ საძიებელი წრფე.

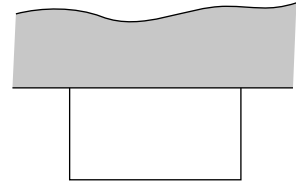
(2) იპოვეთ $y=\frac{3}{2}x^2-5x+4$ ფუნქციის დადებითობისა და უარყოფითობის შუალედები. ააგეთ ნახაზი.

(3) იპოვეთ $y=2x^2-5x+2$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის (მონოტონურობის) შუალედები.

(4) ჩაწერეთ ფორმულით ფუნქცია, რომლის გრაფიკიც მიიღება $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკისგან $\vec{p}(2; 3)$ პარალელური გადატანით. გამოსახეთ ორივე ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზე.

⑤ კახიმ მდინარის ნაპირას სამი მხრიდან უნდა შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთი, ღობის სიგრძე 76 მეტრია (მდინარის მხარეს ნაკვეთი არ არის შემოღობილი).

აღნიშნეთ ნაკვეთის ერთი გვერდი x -ით. გამოსახეთ მისი ფართობი, როგორც x -ის ფუნქცია. დაადგინეთ, რა ზომის უნდა იყოს ამ ნაკვეთის გვერდები, რომ მისი ფართობი უდიდესი იყოს.



⑥ ობიექტის Ox ღერძზე თანაბარი მოძრაობისას მისგან სათავემდე მანძილის დროზე დამოკიდებულებას წარმოგვიდგენს ფუნქცია $d=3,2+2,5t$, სადაც t გაზომილია წმ-ებში, მანძილი — მეტრებში. იპოვეთ ობიექტის მოძრაობის სიჩქარე; გამოსახეთ ის კმ/სთ-ებში.

⑦ მოცემულია $y=-2x+5$ წრფე. ამ წრფის, Oy და Ox ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია, შესაბამისად, A და B . დაწერეთ მოცემულის პარალელური წრფის განტოლება, რომელიც Oy ღერძს $(0; 10)$ წერტილში კვეთს და მიღებულ წრფეზე ისე შეარჩიეთ C და D წერტილები (გამოთვალეს მათი კოორდინატები), რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი მართკუთხედი იყოს.

⑧ ორ ერთმანეთზე დამოკიდებული x და y სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებული (x_i ; y_i) წყვილები.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2	0	3	2	7

- გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი, დაადგინეთ სიდიდეებს შორის კავშირის სახე,
- გამოთვალეთ მისადაგების წრფის საკუთხო კოეფიციენტი,
- დაწერეთ მისადაგების წრფის განტოლება,
- საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ გაფანტულობის დიაგრამა და მისადაგების წრფე.

პასუხები: ① $y=\frac{1}{2}x$. ② დადებითობის შუალედებია $(-\infty; \frac{4}{3})$ და $(2; +\infty)$, უარყოფითობის შუალედია $(\frac{4}{3}; 2)$. ③ კლებადობის შუალედია $(-\infty; \frac{5}{4}]$, ზრდადობის შუალედია $[\frac{5}{4}; +\infty)$. ④ $y=(x-2)^2+3$. ⑤ $S=-2x^2+76x$. ფართობი უდიდესია, როცა გვერდებია 19 მ, 38 მ და 19 მ. ⑥ 2,5 მ/წმ=9 კმ/სთ. ⑦ მოცემულის პარალელური წრფე: $y=-2x+10$; მართობული წრფეები: $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ და $y=\frac{1}{2}x+5$; $C(4,5; 1)$, $D(2; 6)$. ⑧ ა) $r=\frac{19}{\sqrt{10 \cdot 46}} \approx 0,89$, დადებითი, ბ) $k=\frac{19}{10}=1,9$; გ) $y=1,9x-1,8$.

განმსაზღვრელი შეფასების რუბრიკა.

ამჯერად ნაშრომს ვაფასებთ მაქსიმალური 20 ქულით და განმსაზღვრელი შეფასების ქულის დასადგენად მოსწავლის მიერ მიღებულ ქულებს ვყოფთ 2-ზე.

① იპოვა საძიებელი წრფის დახრა და დაწერა განტოლება — შეფასდეს 1 ქულით. კიდევ 1 ქულა დაემატოს ნახაზის აგებისთვის და ნახაზზე საძიებელი წრფის გამოსახვისთვის. სულ — 2 ქულა.

② სამწევრის ნულების პოვნა შეფასდეს 1 ქულით, დადებითობისა და უარყოფითობის შუალედების დადგენაც 1 ქულით. სულ 2 ქულა.

③ იპოვა წვეროს აბსცისა — შეფასდეს 1 ქულით, დაწერა ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები — კიდევ 1 ქულა. სულ 2 ქულა.

④ საძიებელი ფუნქციის განტოლების დაწერა შეფასდეს 1 ქულით. მხოლოდ პარალელური გადატანის ფორმულების წარმოდგენა — 0,5 ქულით. გრაფიკების აგება შეფასდეს 1 ქულით. სულ — 2 ქულა.

⑤ 1 ქულით შეფასდეს ფართობის გამოსახვა x -ის საშუალებით. კიდევ 1 ქულა დაემატოს უდიდესი მნიშვნელობის პოვნისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑥ 1 ქულით შეფასდეს სიჩქარის მითითება, კიდევ 1 ქულა დაემატოს კმ/სთ-ებში გადაყვანისთვის. სულ — 2 ქულა.

⑦ პარალელური წრფის განტოლების ($y = -2x + 10$) შედგენა შეფასდეს 1 ქულით. მოცემული წრფის მართობული, A და B წერტილებზე გამავალ განტოლებებიდან თითოეულის შედგენისთვის დაეწეროს თითო ქულა. მიღებული წრფეების $y = -2x + 10$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილების პოვნისთვის (ანუ პასუხის დაფიქსირებისთვის) — კიდევ 1 ქულა. სულ — 4 ქულა.

⑧ ა), ბ), გ) და დ) დავალებებიდან თითოეულის შესრულებისთვის დაეწეროს თითო ქულა. სულ — 4 ქულა.

დავალების შემოწმების გაიოლების მიზნით გთავაზობთ ⑧ ამოცანის დეტალურ ამოხსნას.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
0	-2	-2	4	-4	16	8
1	0	-1	1	-2	4	2
2	3	0	0	1	1	0
3	2	1	1	0	0	1
4	7	2	4	5	25	8
ჯამი	10	0	10	0	46	19

$$\bar{x} = 2, \quad \bar{y} = 2$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{19}{\sqrt{10 \cdot 46}} = \frac{19}{\sqrt{460}} \approx \frac{19}{21,45} \approx 0,89$$

$$y - 2 = k(x - 2)$$

$$y - \bar{y} = k(x - \bar{x}).$$

$$y = 1,9x - 2 \cdot 1,9 + 2$$

$$y = 1,9x - 1,8.$$

წრფივი და კვადრატული ფუნქციები ქმედითი ინსტრუმენტებია თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების კვლევაში. მე-9 თავის განხილვა არსებითად გაამდიდრებდა მოსწავლეთა ცოდნასა და უნარებს, თუმცა განმავითარებელი შეფასებით თქვენ შეძლებთ შეავსოთ შენიშნული ხარვეზები. შემაჯამებელი წერის შედეგები საუკეთესო ინდიკატორია რეალური ვითარების შესაფასებლად, განმავითარებელი შეფასების საყრდენი ინსტრუმენტი. აქვე შევნიშნავთ, რომ განმავითარებელი შეფასება, ფაქტობრივად, სასწავლო პროცესის ყოველი აქტივობისას უნდა მიმდინარეობდეს. აქცენტი უნდა კეთდებოდეს ძირითადი სამიზნე ცნებების გააზრებაზე, მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენების განვითარებაზე.

შემაჯამებელი წერის შემდგომი განმავითარებელი შეფასებისას ძირითადი აქცენტი უნდა გაკეთდეს:

① ამოცანაში წრფის განტოლების არსზე, ამოცანაში არსებულ გეომეტრიულ წარმოდგენებზე, გრაფიკის ცნებაზე და მისი აგების გზაზე.

② და ③ ამოცანებში კვადრატული ფუნქციის ზოგად სახეზე, მის გრაფიკზე და გრაფიკზე დაკვირვებით (ან ანალიზური კვლევით) ფუნქციის აღწერაზე; მონოტონურობისა და ნიშანმდებლობის შუალედების დადგენაზე.

④ ამოცანაში გეომეტრიული გარდაქმნების მოკლე მიმოხილვაც მოისმინეთ მოსწავლეებისგან. გრაფიკების გარდაქმნის საილუსტრაციო ნიმუშებიც განიხილეთ ინტერაქტიული ფორმით.

⑤ ამოცანაში ტექსტური ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნაზე; უცნობის შემოტანის მნიშვნელობასა და მიღებული კვადრატული ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობის ძიებაზე. სათანადო გეომეტრიული წარმოდგენაც დაიხმარეთ.

⑥ ამოცანაში მოძრაობის განტოლების შედგენაზე, სიდიდეთა ერთეულებს შორის კავშირზე, მუდმივი სიჩქარის დროს გავლილი მანძილის სათანადო წრფივი ფუნქციის კოეფიციენტების შერჩევაზე.

⑦ კვლავ გეომეტრიულ წარმოდგენებზე და სათანადო ძირითად სამიზნე ცნებებზე. წრფეთა ურთიერთგანლაგებაზე, მართობულობისა და პარალელურობის პირობებზე.

⑧ დაწყვილებულ მონაცემთა კვლევაზე, სათანადო გაბნევის დიაგრამაზე, წრფის გასწვრივ წერტილთა განლაგების შესწავლაზე, დახასიათებაზე, მისადაგების წრფის რაობაზე, მის მნიშვნელობაზე პროგნოზირების საკითხებში.

მე-9 თავის შემაჯამებელი წერის შედეგების მიხედვით თქვენ შეძლებთ დააკონკრეტოთ მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევების ხარისხის დონეები სოლო ტაქსონომიის მიხედვით.

პრესტრუქტურული დონე. სამიზნე ცნებებზე აქვს არამკაფიო წარმოდგენა, სათანადო მკვიდრ წარმოდგენებს ვერ ავლენს. მნიშვნელოვანი ხარვეზები აქვს წინარე ცოდნაშიც.

უნიტრუქტურული დონე. მოსწავლე აგებს წრფივი ფუნქციის გრაფიკს, ახერხებს გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების დადგენას. უჭირს კვადრატული ფუნქციის კვლევა და გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის აღწერა. პოულობს

წრფეთა გადაკვეთის წერტილს, თუმცა მოცემულ წერტილზე, მოცემული წრფის მართობული წრფის განტოლების დადგენისას უშვებს შეცდომებს.

მულტიტრუქტურული დონე. წრფივი და კვადრატული ფუნქციების გრაფიკების ანალიზს გამართულად ატარებს. ტექსტური ამოცანების კვლევისას მათი მათემატიკური მოდელის შექმნა ზოგჯერ პრობლემურია მისთვის. მისადაგების წრფის განტოლების დადგენა სრულყოფილად არ შეუძლია. კარგად ართმევს თავს მოცემული წრფის პარალელური და მართობული წრფეების დადგენის ამოცანებს.

მიმართებითი დონე. კლასში დამუშავებული ყველა ამოცანის განხილვის კვალობაზე შეუძლია მსგავსი ამოცანების წარმატებით გადაჭრა. ცნებებს აყალიბებს მკაფიოდ, შეუძლია ფუნქციათა გრაფიკების აგება და მათი გარდაქმნები. აგებს დაწყვილებულ მონაცემთა კვლევისას მისადაგების წრფეს და პოულობს კორელაციის კოეფიციენტს.

გაფართოებული აბსტრუქტული დონე. დასმულ ამოცანათა კვლევისას იგრძნობა მისი შემოქმედებითი მიდგომა. გვთავაზობს ამოცანათა გადაჭრის სხვადასხვა გზას და ირჩევს ოპტიმალურს. მისი გეომეტრიული წარმოდგენები ნათელია, მათი აღწერა — დამაჯერებელი. იძლევა მისადაგების წრფის მკაფიო დახასიათებას, წარმოაჩენს ამ წრფის როლს მონაცემთა პროგნოზირებაში. მის ნაშრომში შეინიშნება დასმულ ამოცანათა განზოგადების ცდები.

ლიტერატურა

1. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო, თბილისი, 1988.
2. თ. გეგელია. მათემატიკის სპეციალური კურსი, თბილისი, განათლება, 1985.
3. თ. გეგელია. სასკოლო მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები. თბილისი, 1985.
4. გ.გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის სწავლების რეფორმა და მისაღები გამოცდები. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში, 1977, 4.
5. ლ. გოკიელი. მათემატიკის საფუძვლები, თბილისი, 1958.
6. თ. ვეფხვაძე. მათემატიკის რჩეული თავები. I ნაწ., თბილისი, 1997.
7. ე. იმერლიშვილი. სასკოლო მათემატიკის განვითარების ისტორია, თბილისი, 1988.
8. რ. კურანტი, ჰ. რობინსონი. რა არის მათემატიკა. თარგმანი რუსული გამოცემიდან, თბილისი, 1961.
9. ჰ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები, თბილისი, 2000.
10. ეროვნული სასწავლო პროგრამა. საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში. პროექტი, 2005.
11. შ. ფხაკაძე. განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი, თბილისი, 1974.
12. ფ. ხარშილაძე. მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981.
13. Н. Бурбаки. Очерки по истории математики, Москва, 1963.
14. Б.В. Гнеденко. Статистическое мышление и школьное математическое образование, Математика в школе, 1968, №1.
15. Диофант, Арифметика, Москва, 1975.
16. В.А. Добровольский. Даламбер. «Знание», Москва, 1968.
17. Евклид. Начала. Москва, 1950.
18. М. Клайн. Математика. Поиск истины. Москва, 1988.
19. Ф. Клайн. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 1, т. 2, 1972.
20. А.Н. Колмогоров. Математика – наука и профессия, Москва, 1968.
21. Ю.А. Макаренков, А.А. Столяр. Что такое алгоритм, Минск, 1989.
22. Математика в понятиях, определениях и терминах, т. 1, 2. Москва, 1978.
23. Математическая энциклопедия (в пяти томах). Москва, 1975.
24. Методика преподавания математики в средней школе, Москва, 1977.
25. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей, Москва, 1978.
26. С.М. Никольский и др. Арифметика, Москва, 1988.
27. Ж. Пиаже и др. Преподавание математики, пер. с франц. Москва, 1960.
28. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения, пер. с англ., Москва, 1975.
29. Д. Пойа. Как решить задачу. Перев. с англ., Москва, 1963.
30. Д. Пойа. Математическое открытие, Пер. с англ., Москва, 1976.
31. Д. Пидоу. Геометрия и искусство, Москва, 1960.
32. А.В. Погорелов. Геометрия 7–11. Москва, 1990.
33. А. Пуанкаре. О науке, Москва, 1963.

34. В. Серве. Аксиоматика и элементарная геометрия. Мат. в школе, №6, 1967.
35. Франсуа–Мари Жерар, Ксавье Рожье. Разработка и анализ школьных учебников. При участии Кристиан Боснан и др., Москва, 1993.
36. Г. Фройденталь. Математика в науке и вокруг нас. Москва, 1977.
37. Г. Фройденталь. Математика как педагогическая задача, Москва, ч. 1. 1982, ч. II, 1983.
38. А. Фуше. Педагогика математики, Москва, 1969.
39. И.Ф. Шарыгин. Геометрия 7–9, Москва, 1998.
40. И.М. Яглом. О школьном курсе геометрии, Математика в школе, №2, 1968, 53–58.
41. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Современные основы школьного курса математики, Москва, 1980;
42. Н.Я. Виленкин, К.И. Дунаичев, Л.А. Калутнин, А.А. Столяр. Методика преподавания математики в средней школе. Москва, 1977;
43. Преподавание алгебры в 6–8 классах. Сборник статей, Москва, 1980.
44. M.R. Schroder. Number Theory in Science and Communication – New York: Springer, 1984;
45. K. Rosen, Elementary Number Theory and its Applications, Reading (Mass.). Addison Wesley, 1984
46. H. Riesel. Prime Numbers and Computer Methods for Factorisation, Boston; Burkhaser, 1987
47. Houghton Mifflin Mathematics, Mifflin Company, Boston, 1987
48. Mathematics Unlimited, Printed in the United States of America, 1988
49. Middle Grades, Mathematics an Interactive Approach, Printed in the USA, 1995
50. Larson, Hostetler. Precalculus, Printed in the Unites States of America, 1996.

დამატებითი ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები

სასწავლო პროცესში დიდ დახმარებას გააჩნევთ ბეჭდური და ელექტრონული რესურსები. განსაკუთრებული მნიშვნელობა შეიძინა ამ რესურსებმა დისტანციური სწავლებისას:

1. ტელესკოლა-1TV.
2. www.silkschool.ge. „საშინაო სკოლა“, გაკვეთილები, მათემატიკა.
3. როგორ ვასწავლოთ მოსწავლეებს აზროვნება, მეთოდოლოგიური სახელმძღვანელო, თბილისი, 2007.
4. გიორგი ნოზაძე, მოსწავლეთა საჭიროებანი და მიზნები მათემატიკის სწავლის დროს, 13 მარტი, 2017 წელი, www.maswavlebeli.ge.
5. რობერტ ჯ. მარზანო, დებრა ჯ. ფიქერინგი, ჯეინ ი. ფოლოქი, ეფექტური სწავლება სკოლაში. მასწავლებელთა პროფესიული განვითარების ცენტრი, 2009.
6. ეკატერინე კორძაძე, „მათემატიკური წიგნიერება“, სამოქალაქო განვითარების ინსტიტუტი, თბილისი, 2012.
7. ტერმინოლოგიური ლექსიკონი, www.ncp.ge (ეროვნული სასწავლო გეგმების პორტალი).
8. „მათემატიკა“, სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტი მათემატიკაში.
9. ინტერნეტრესურსი: Geogebra.org.
10. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLZAJN80qYfiJ4uPrcdg8NKCZ-eJhx-ulv&fbclid=IwAR2yUsK8aFZtPTRoeyCTlcNuKkmHjUXYPdRagmHnzdeLOAoy8gADFqqjtjE>.
11. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standarts/Positions,-Standards-and-Expectations/> (National Council of Teachers of Mathematics)
12. *Develping Pedagogic Skills for the Use of the Interactive Whiteboard in Mathematics [PDF]*.
13. ინტერნეტრესურსი: Desmos.com.

